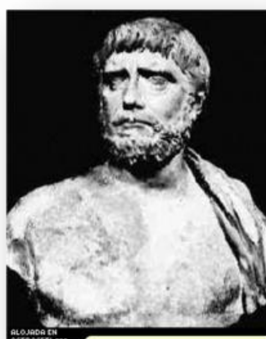
**SEGUNDA EDICIÓN DEL CURSO DE CAPACITACION**
**EN MATEMATICA**
**PARA PROFESORES DE PRIMARIA**

**MODULO III - GEOMETRIA**

**ENCUENTRO NÚMERO CUATRO**
**TEOREMA DE PITÁGORAS**



**17 DE AGOSTO DEL 2014**
**MANAGUA**
**FINANCIADO POR: FUNDACIÓN UNO**

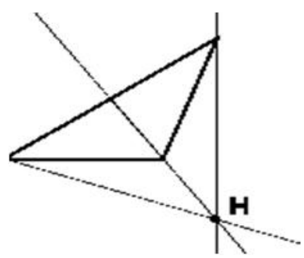
## Clasificación de los triángulos.

| Tipo de triángulo | Características. |
|---|---|
| Equilátero | Tiene sus tres lados congruentes |
| Isósceles | Tiene dos lados congruentes |
| Escaleno | Tiene sus tres lados de diferente medida |
| Equiángulo | Tiene sus tres ángulos congruentes |
| Rectángulo | Tiene un ángulo de medida 90º |
| Obtusángulo | Tiene uno de sus ángulos obtuso |
| Acutángulo | Tiene sus tres ángulos agudos |

**Puntos notables de un triángulo:**

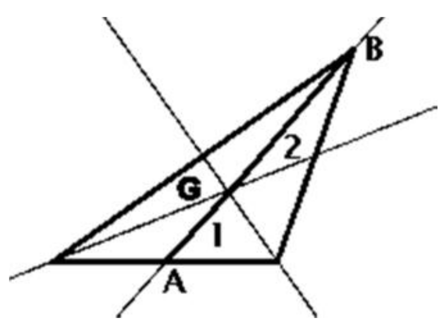
**Alturas de un triángulo:** Altura es cada una de las rectas perpendiculares trazadas desde un vértice al lado opuesto (o su prolongación).

**Ortocentro:** Es el punto de corte de las tres alturas.




**Medianas de un triángulo:** Mediana es cada una de las rectas que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto.

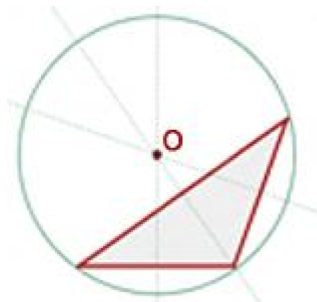
**Baricentro:** Es el punto de corte de las tres medianas. El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos, el segmento que une el baricentro con el vértice mide el doble que el segmento que une baricentro con el punto medio del lado opuesto.




BG = 2GA

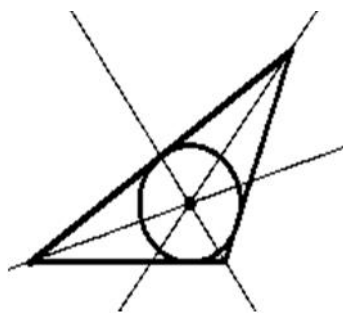
**Mediatrices de un triángulo:** Mediatriz es cada una de las rectas perpendiculares trazadas a un lado por su punto medio.

**Circuncentro:** Es el punto de corte de las tres mediatrices. Es el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo.



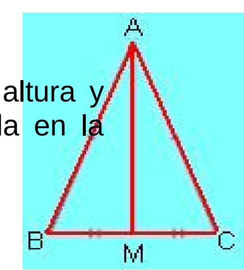

**Bisectrices de un triángulo:** Bisectriz es cada una de las rectas que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.

**Incentro:** Es el punto de corte de las tres bisectrices. Es el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo.



**Teorema.** (Propiedades del triángulo isósceles).

En un triángulo isósceles, la mediana correspondiente a la base es altura y está contenida en la mediatriz de la base y también está contenida en la bisectriz del ángulo correspondiente.(ver la figura).



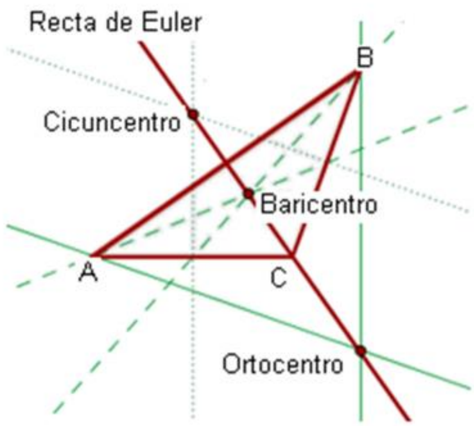

**Observación:**

a) También es cierto que: en un triángulo isósceles, la bisectriz correspondiente a la base contiene a la altura y a la mediana. También está contenida en la mediatriz de la base.

b) También es cierto que: en un triángulo isósceles, la altura correspondiente a la base está contenida en la bisectriz, en la mediatriz de la base y es también altura

**Un resultado muy interesante.**

El ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo no equilátero están alineados; es decir; pertenecen a la misma recta, llamada **recta de Euler**.




Ejercicios:

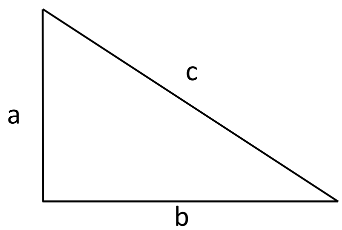
1. En todo triangulo el baricentro resulta ser el centro de gravedad. Compruébalo con un triángulo de cartón, haciendo pasar por el mismo un hilo anudado en su extremo y observando que se mantiene en posición horizontal.
2. De un triángulo isósceles sabemos que su perímetro es 23 cm y que uno de sus lados iguales mide 9 cm. ¿Cuánto medirá el lado desigual?
3. El baricentro de un triángulo se encuentra a 6 cm de uno de sus vértices. ¿Cuál es la medida de la mediana correspondiente a dicho vértice?
4. Dibuje un triángulo equilátero de lado 6 cm, localice su ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro.
5. Dibuje un triángulo de lados 4, 6 y 8 cm, localice sus puntos notables.

**Triangulo Rectángulo, Pitágoras:**

Se supone que Pitágoras era Nativo de Samos y pertenecía, como Tales, a la colonia Jónica de griegos establecida en las costas e islas occidentales de lo que actualmente denominamos Asia Menor. Vivió desde aproximadamente 569 a.c hasta 500 a.c, se instaló en Crotona, una ciudad de la colonia dórica en el sur de Italia y allí comenzó a disertar sobre filosofía y matemática. A su cátedra asistían una muchedumbre de entusiastas de todas las clases e incluso las mujeres infringían una ley que les prohibía asistir a reuniones públicas y acudían a oírle. Entre las más atentas se encontraba Theano, la joven y hermosa hija de su huésped Milo, con la cual se casó.

La Influencia de este gran maestro fue tan notable, que los mas interesados de sus discípulos se constituyeron gradualmente en una sociedad o hermandad. Se les conocía como la orden de Pitágoras y pronto ejercieron una gran influencia más alla del mundo griego, esta influencia fue tanto política como religiosa. Los miembros de la sociedad lo compartían todo, sostenían las mismas creencias filosóficas se dedicaban a las mismas investigaciones y se comprometían con un juramento a no revelar los secretos y las enseñanzas de la escuela. Por ejemplo Hippaso pereció en un Naufragio, se pensó que su destino era debido a una promesa rota : ¡ había divulgado el secreto de la esfera con sus doce pentágonos!

El teorema más famoso por el que se conoce el nombre de Pitágoras dice así: **En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa** $c^2 = b^2 + a^2$




Los antecedentes históricos de este teorema datan de las civilizaciones babilónica y egipcia, dentro del segundo milenio a.c. Existen tablas de números pitagóricos (cumplen con el teorema de Pitágoras) y diversos papiros como el Rhind y el de Moscú, que así lo confirman. Los agrimensores egipcios construían triángulos de catetos 3 y 4 y de hipotenusa 5, mediante una cuerda de 12 nudos, para parcelar el terreno tras las inundaciones del Nilo.

- Ejercicio: En la siguiente tabla dispones de los catetos correspondientes a diferentes triángulos rectángulos. Dibújalos y tras medir sus respectivas hipotenusas, comprueba que verifican la relación aritmética del teorema de Pitágoras.

| Catetos : a y b | Hipotenusa: c | Relación aritmética $c^2 = b^2 + a^2$ |
|---|---|---|
| 3 y 4 | | |
| 6 y 8 | | |
| 5 y 12 | | |

**Corolario.** En todo triángulo rectángulo, los ángulos interiores diferentes del ángulo recto son agudos.

**Teorema.** (Los cuatro casos de congruencia de triángulos rectángulos).

i) Dos triángulos rectángulos que tengan congruentes sus catetos, son congruentes.

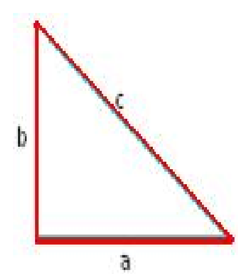
ii) Dos triángulos rectángulos que tengan congruentes un cateto y un ángulo agudo, son congruentes (el cateto puede ser adyacente o no al ángulo agudo).

iii) Dos triángulos rectángulos que tengan congruentes la hipotenusa y un ángulo agudo, son congruentes.

iv) Dos triángulos rectángulos que tengan congruentes la hipotenusa y un cateto, son congruentes.

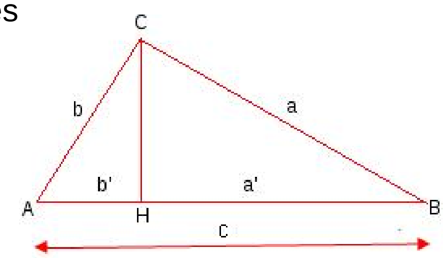
## Demostración del Teorema de Pitágoras, utilizando semejanza de triángulos.

Sea el triángulo ABC, rectángulo en C. El segmento CH es la altura relativa a la hipotenusa, en la que determina los segmentos *a'* y *b'*, proyecciones en ella de los catetos *a* y *b*, respectivamente.



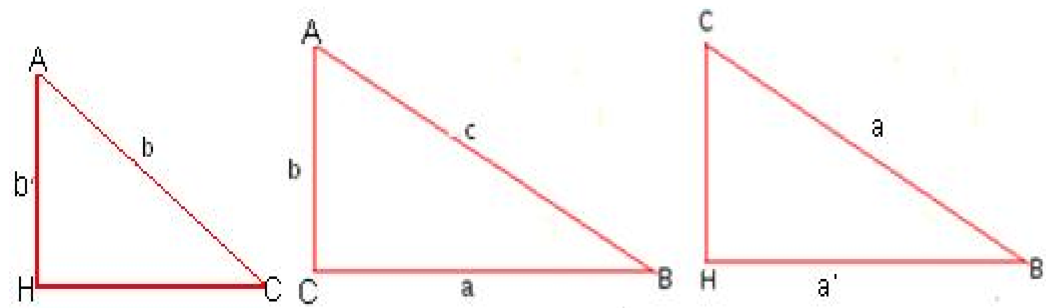
Si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes $a$ y $b$ la medida de la hipotenusa es c, se establece que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$




Los triángulos rectángulos ABC, AHC y BHC son semejantes. El Criterio que aplica para estas semejanzas es el criterio AA. Se sugiere ubicar los triángulos rectángulos en la misma posición, esto permite visualizar mejor las correspondencias.

En la siguiente figura, se comparan tres triángulos obtenidos de la figura anterior.




De la semejanza entre ABC y ACH tenemos que:

$$\boldsymbol{\frac{b}{b'} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = b'c}$$

De la semejanza entre ABC y CBH tenemos que:

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{a} \Rightarrow a^2 = a'c$$

Sumando estos resultados, obtenemos:

$a^2 + b^2 = a'c + b'c \Rightarrow a^2 + b^2 = (a' + b')c$ , pero $a' + b' = c$ , por lo tanto $a^2 + b^2 = cc = c^2$

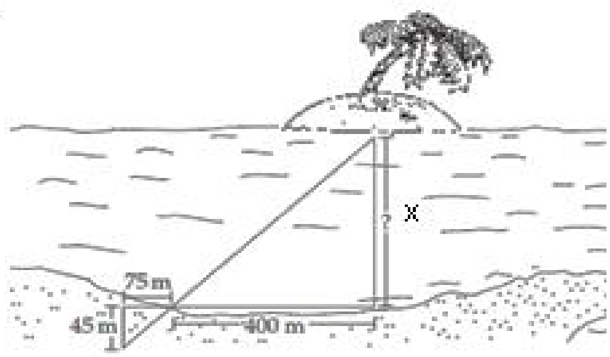
Existen numerosas demostraciones del teorema de Pitágoras. Aquí se ha presentado la que se basa en los criterios de semejanza de triángulos.

**Actividad.**

- Los números 3,4 5 son un ejemplo de una terna pitagórica. Es fácil observar que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Intenta construir otras ternas pitagóricas.
- Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos tengan medidas 1cm. Traza la hipotenusa y mídela. Utiliza el teorema de Pitágoras para verificar que la hipotenusa tiene una medida igual $\sqrt{2}$ .
- Usando la idea de la actividad anterior encontrar gráficamente $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{13}$. .

**Ejemplo** ¿A qué distancia se encuentra la isla de la orilla?

a.




- En la figura se pueden identificar dos triángulos semejantes (identifícalos). De la semejanza obtenemos:

$$\frac{400}{75} = \frac{x}{45} \Rightarrow x = \frac{(400)(45)}{75} = 240m$$

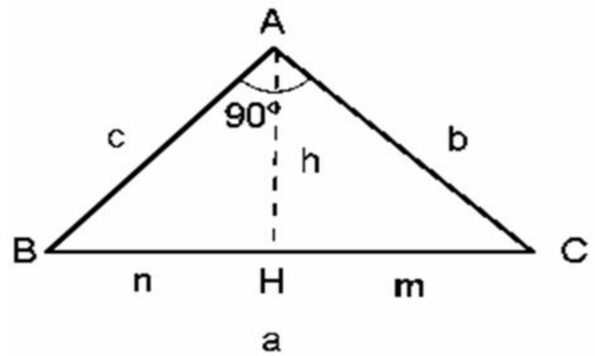
**<u>Teorema del Cateto:</u> En todo triángulo rectángulo un cateto es** <u>media proporcional</u> **entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.**

**a: hipotenusa,**

**b y c: catetos**

**m: proyección del cateto b sobre la hipotenusa**

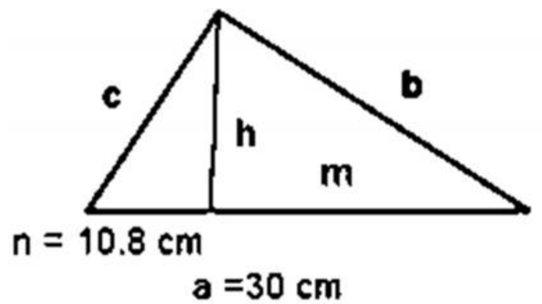
**n: proyección del cateto c sobre la hipotenusa**




$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \qquad b^2 = a \cdot m$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \qquad c^2 = a \cdot n$$

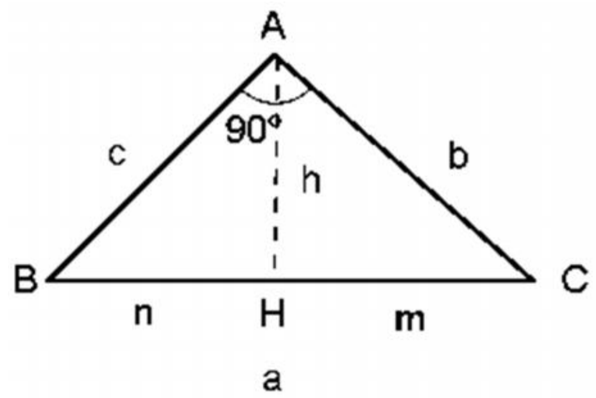
- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 cm y la proyección de un cateto sobre ella 10.8 cm. Hallar el otro cateto.




$$\frac{c}{30} = \frac{10.8}{c} \qquad c^2 = 30 \cdot 10.8$$

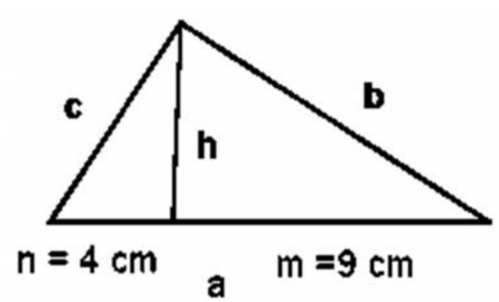
$$c = \sqrt{30 \cdot 10.8} \qquad c = 18\ cm$$

**<u>Teorema de la altura.</u> En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los 2 segmentos que dividen a ésta.**




$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \qquad h^2 = m \cdot n$$

- En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 4 y 9 metros. Calcular la altura relativa a la hipotenusa.




$$\frac{9}{h} = \frac{h}{4} \qquad h^2 = 36$$

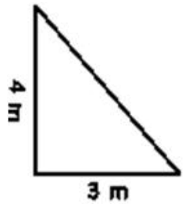
$$h = \sqrt{36} \qquad h = 6 \ cm$$

**Aplicaciones del teorema de Pitágoras:**

**1.** Conociendo los dos catetos calcular la hipotenusa

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Los catetos de un triángulo rectángulo miden en 3 m y 4 m respectivamente. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

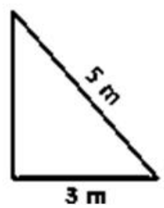



$$a^2 = 3^2 + 4^2 \qquad a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5m$$

**2**. Conociendo la hipotenusa y un cateto, calcular el otro cateto

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \begin{cases} c = \sqrt{a^2 - b^2} \\ b = \sqrt{a^2 - c^2} \end{cases}$$

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 m y uno de sus catetos 3 m. ¿Cuánto mide otro cateto?

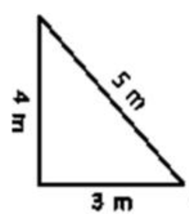



$$5^2 = 3^2 + c^2 \qquad c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4m$$

**3**. Conociendo sus lados, averiguar si es rectángulo

**Para que sea rectángulo el cuadrado de lado mayor ha de ser igual a la suma de los cuadrados de los dos menores.**

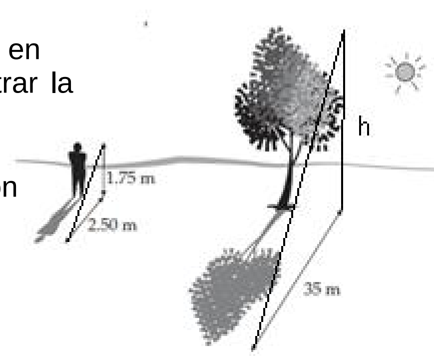
Determinar si el triángulo es rectángulo.




$$5^2 = 3^2 + 4^2 \qquad 25 = 25$$

Ejemplo de Aplicación de semejanza en triangulos rectángulos:

En la figura se dan algunas distancias medida en metros. Utilizando los criterios de semejanza, encontrar la altura del árbol.




**Solución**: Los dos triángulos rectángulos de la figura son semejantes, entonces:

$$\frac{h}{1.75} = \frac{35}{2.50} \Rightarrow h = \frac{(35)(1.75)}{2.50} = 24.5m$$

El teorema de Pitágoras es de mucha utilidad en la resolución de problemas de la vida cotidiana. Por ejemplo:

- Se desean bajar frutos de un árbol de naranjas, para ello se quiere construir una escalera que sea capaz de alcanzarlos, sabiendo la altura a la que se encuentran los frutos y la distancia del árbol a la base de la escalera.
- El famoso Galileo Galilei, utilizó el teorema de Pitágoras para determinar la medida de algunas montañas lunares.
- Conocer la altura de un edificio, sabiendo la medida de la sombra que proyecta y la distancia del punto más alto del edificio al extremo de la sombra.
- Cálculo de la diagonal de un cuadrado de lado l.
- Cálculo de la altura de un triángulo isósceles.

**Aplicaciones del teorema de Pitágoras. Ejercicios**

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 405.6 m y la proyección de un cateto sobre ella 60 m. Calcular:
   - Los catetos.
   - La altura relativa a la hipotenusa.
2. Una escalera de 10 m de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 6 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?
3. Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 3 y 9 cm respectivamente. Averigua la longitud de los catetos, así como la de la altura relativa a la hipotenusa.
4. Completa la siguiente tabla:

| Hipotenusa : a | Cateto: b | Cateto: c |
|---|---|---|
| $\sqrt{2}$ | | 1 |
| 20 | 12 | |
| | 9 | 12 |

5. Completa la siguiente tabla:

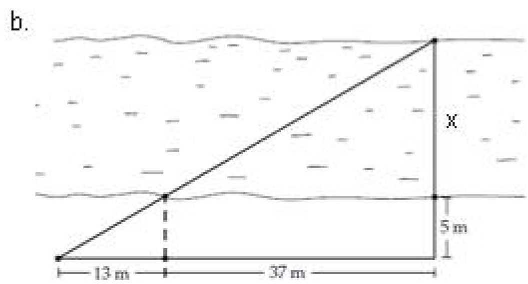
| a | b | c | ¿Es rectángulo? |
|---|---|---|---|
| 8 | 6 | 4 | |
| 13 | | 5 | Sí |
| | 24 | 7 | No |
| 26 | 24 | 10 | |

6. El tamaño de las pantallas de televisión viene dado por la longitud en pulgadas de la diagonal de la pantalla (una pulgada equivale a 2,54 cm). Si un televisor mide 34,5 cm de base y 30 cm de altura, ¿cuál será su tamaño?
7. Dibuje un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm, localice sus puntos notables.
8. Si los ángulos A y C de un triángulo ABC miden 40º y 30º respectivamente, ¿Cuál de sus tres lados es el mayor?

9. El ángulo desigual de un triángulo isósceles mide 80º, ¿Cuánto mide cada un de los ángulos iguales?

10. ¿Cuánto mide el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos de un triángulo equilátero?

11. ¿A qué distancia se encuentra la isla de la orilla?




**<u>Problemas de selección multiple:</u>**

1. Si los ángulos interiores de un triángulo miden 40º, 60º y 80º, entonces el triángulo es:
   a. Obtusángulo b. Acutángulo c. Rectángulo d. Ninguna de las anteriores

2. Si los lados de un triángulo miden 4, 9 y 8; entonces su perímetro será:
   a. 19 b. 20 c. 21 d. 22

3. El segmento que une el vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto se llama: a. Bisectriz b. Altura c. Mediatriz d. Mediana

4. El segmento que parte de un vértice y cae perpendicular al lado opuesto se llama:
   a. Bisectriz b. Mediatriz c. Mediana d. Altura

5. El punto donde concurren las tres mediatrices de un triángulo se llama:
   a. Baricentro b. Incentro c. Circuncentro d. Ortocentro

6. En un triángulo Isósceles la altura relativa a la base es a la vez:
   a. Mediana y Bisectriz b. Mediana de la base c. Bisectriz