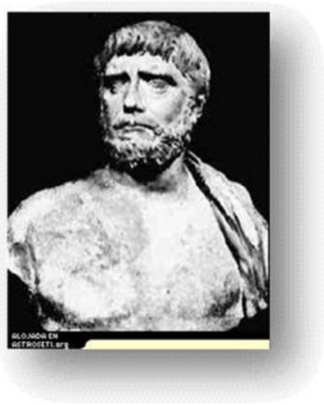
SEGUNDA EDICIÓN DEL CURSO DE CAPACITACION EN MATEMATICA PARA PROFESORES DE PRIMARIA

MODULO III - GEOMETRIA

ENCUENTRO NÚMERO TRES
El Teorema de Thales y sus Aplicaciones



03 DE AGOSTO DE 2014
MANAGUA
FINANCIADO POR: FUNDACIÓN UNO

THALES DE MILETO (624 a.C - 546 a.C.)

Nació y murió en la ciudad de Mileto. Sus padres fueron Examyes y Cleobuline. Fue maestro de Anaximandro. Ninguno de sus escritos sobrevivió, por lo que es difícil saber exactamente cuáles fueron sus descubrimientos matemáticos. Probablemente se le atribuyan descubrimientos que no le corresponden. Lo que sabemos de Thales proviene de Aristóteles. Primero fue a Egipto y desde allí introdujo en Grecia Los estudios sobre Geometría.

Filósofo griego, científico y matemático, pero actuaba como un ingeniero. Es considerado el primero de los Siete Sabios Griegos24. El hecho concreto que más aseguró su reputación fue la predicción de un eclipse de sol. en 585 a.C., que tuvo lugar exactamente el. 28 de mayo del año que él había predicho. Igualmente fue el primero en mantener que la luna brilla por el reflejo del sol.

Se dice que tomó prestada la Geometría de los egipcios y dio en ella un avance fundamental ya que fue el primero en emprender la tarea de demostrar exposiciones matemáticas mediante series regulares de argumentos. En otras palabras, inventó la matemática deductiva. Se le asignan entre otros los siguientes teoremas:

1. Un ángulo inscripto en una semicircunferencia es un ángulo recto.
2. Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por un diámetro.
3. Los ángulos básicos en un triángulo isósceles son iguales.
4. Los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas, son iguales.
5. Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son iguales.

Midió la altura de las pirámides midiendo la altura de sus sombras en el momento en el cual la sombra de una persona es igual a su altura. Este razonamiento no parece surgir de conocimientos geométricos sino más bien de una observación empírica. Creyó que en el momento en que la sombra de un objeto coincide con su altura, también eso es válido para cualquier objeto, por ejemplo, la pirámide.

Razón de dos segmentos.

Se llama razón de dos segmentos al cociente que se obtiene al dividir sus correspondientes medidas expresadas en la misma unidad.

Segmentos Proporcionales.

Dos segmentos rectilíneos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a otros dos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$, si: $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$

Ejercicios:

Averigua si los siguientes segmentos son proporcionales:

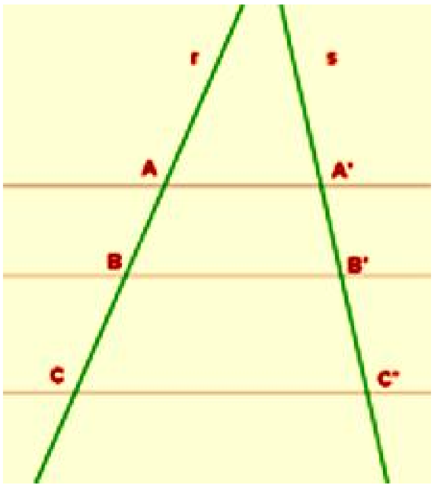
a) 3 cm., 5 cm., 7 cm., 9 cm.

b) 2 cm., 4 cm., 10 cm., 5 cm.

Tres segmentos miden respectivamente 5 cm, 7 cm y 10 cm. De entre las posibles medidas que se dan para un cuarto segmento, escoge la adecuada para que los cuatro sean proporcionales: 3 cm., 14 cm. ó 3,5 cm.

Teorema de Thales

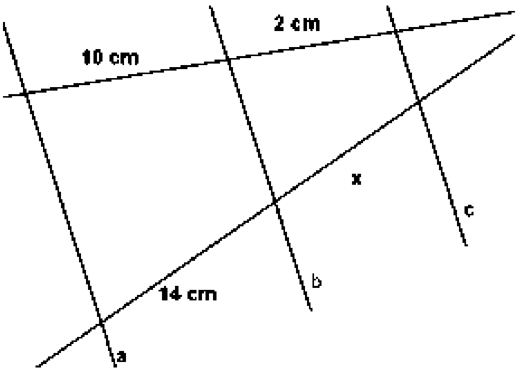
Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

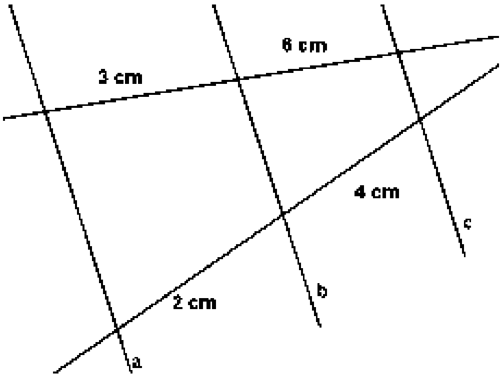
Ejemplos

1. Las rectas a, b y c son paralelas. Calcular la longitud del segmento x.



$$\frac{14}{10} = \frac{x}{4} \qquad x = \frac{14 \cdot 4}{10} = 5.6\ cm$$

2. Las rectas a, b son paralelas. ¿Podemos afirmar que c es paralela a las rectas a y b?



Sí, porque se cumple el **teorema de Thales**.

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \qquad 12 = 12$$

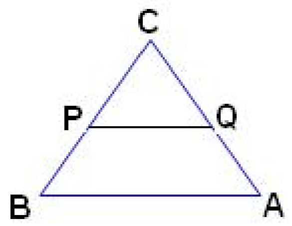
El teorema de Thales en un triángulo

Dado un **triángulo ABC**, si se traza un **segmento paralelo, B'C',** a uno de los **lados** del triángulo, se obtiene otro **triángulo AB'C'**, cuyos **lados** son **proporcionales** a los del **triángulo ABC**. (Dibuje el triangulo)

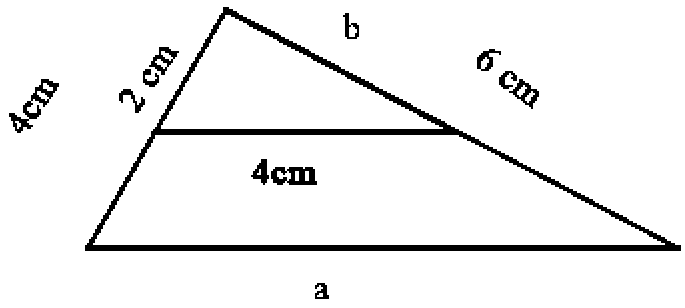
$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene por medida la mitad de la medida del tercer lado.
Para comprobar esto mide los segmentos AB y PO y compara las medidas obtenidas.

$$\text{P y Q son puntos medios} \Rightarrow \overline{PQ} \parallel \overline{BA} \text{ y } PQ = \frac{1}{2}BA$$



Ejemplo: Hallar las medidas de los segmentos a y b.



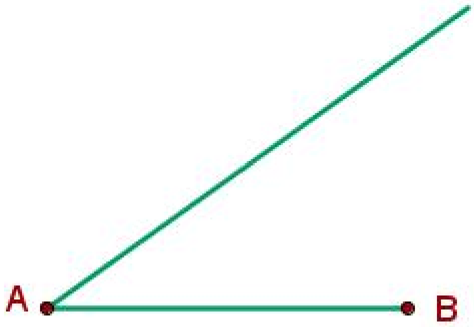
$$\frac{4}{2} = \frac{6}{b} \qquad b = 3cm$$

$$\frac{4}{2} = \frac{a}{4} \qquad a = 8cm$$

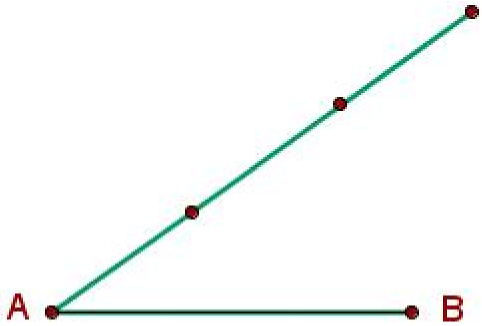
<u>**Aplicaciones del teorema de Thales**</u>

El **teorema de Thales** se utiliza para **dividir un segmento en varias partes iguales**.

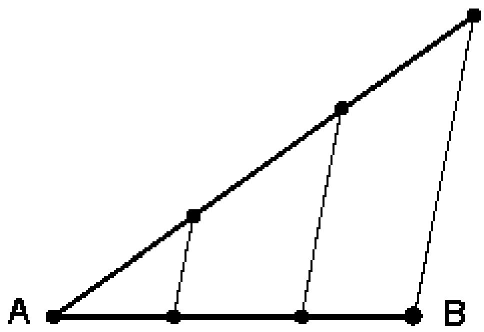
Ejemplo: Dividir el segmento AB en 3 partes iguales



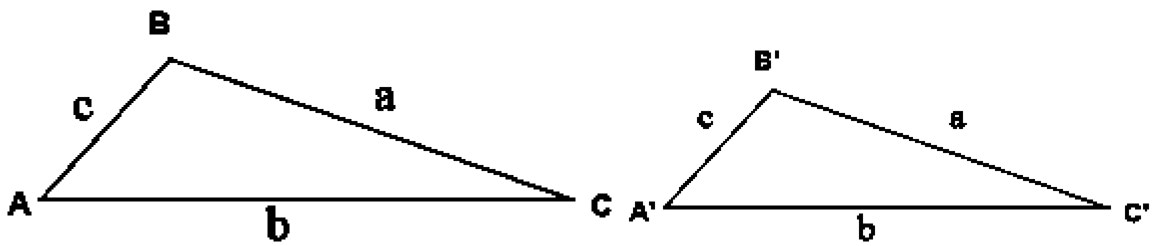
1. Se dibuja una semirrecta de origen el extremo A del segmento.



2. Tomando como unidad cualquier medida, se señalan en la semirrecta 3 unidades de medida a partir de A.



3. Por cada una de las divisiones de la semirrecta se trazan rectas paralelas al segmento que une B con la última división sobre la semirrecta. Los puntos obtenidos en el segmento AB determinan las 3 partes iguales en que se divide.



Los lados a y a', b y b', c y c' se llaman **lados homólogos**.

Son **ángulos homólogos**:

$\hat{A}$ y $\hat{A}'$ $\hat{B}$ y $\hat{B}'$ $\hat{C}$ y $\hat{C}'$

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos homólogos iguales y sus lados homólogos proporcionales.

$$\hat{A} = \hat{A}', \qquad \hat{B} = \hat{B}', \qquad \hat{C} = \hat{C}'$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

La razón de la proporción entre los lados de los triángulos se llama **razón de semejanza**.

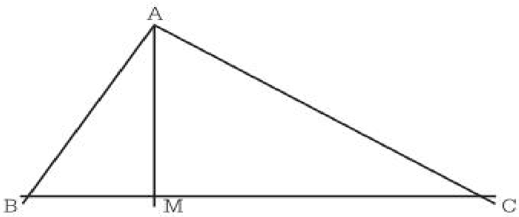
La razón de los perímetros de los triángulos semejantes es igual a su razón de semejanza.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{p}{p'} = r$$

La razón de las áreas de los triángulos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

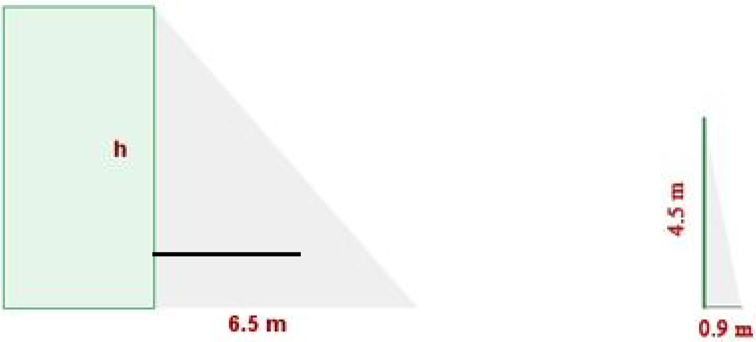
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r \qquad\qquad \frac{S}{S'} = r^2$$

En el triángulo rectángulo ABC de la figura se traza la altura correspondiente a la h
potenusa. Razona el motivo de que los triángulos ABC, ABM y AMC sean semejante:



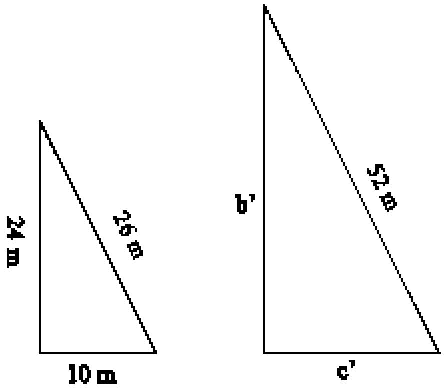
Ejemplos

1. Calcular la altura de un edificio que proyecta una sombra de 6.5 m a la misma hora que un poste de 4.5 m de altura da una sombra de 0.90 m.



$$\frac{0.9}{6.5} = \frac{4.5}{x} \qquad\qquad x = \frac{6.5 \cdot 4.5}{0.9} = 32.5\,\mathrm{m}$$

2. Los catetos de un triángulo rectángulo que miden 24 m y 10 m. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero cuya hipotenusa mide 52 m?

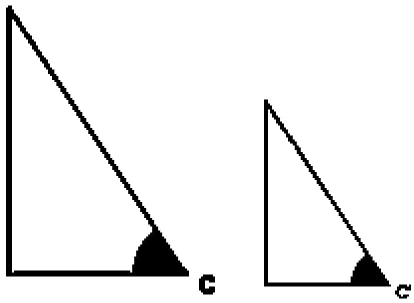


$$a = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$$

$$\frac{26}{52} = \frac{24}{b'} \qquad b' = \frac{52 \cdot 24}{26} = 48 \text{ m}$$

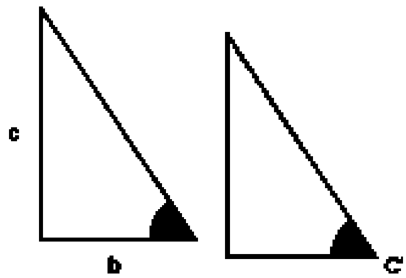
$$\frac{26}{52} = \frac{10}{c'} \qquad c' = \frac{52 \cdot 10}{26} = 20 \text{ m}$$

1. **Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual.**



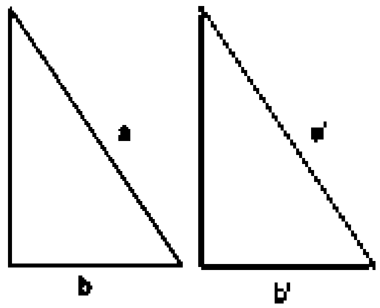
$$C = C'$$

2. **Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen los dos catetos proporcionales.**



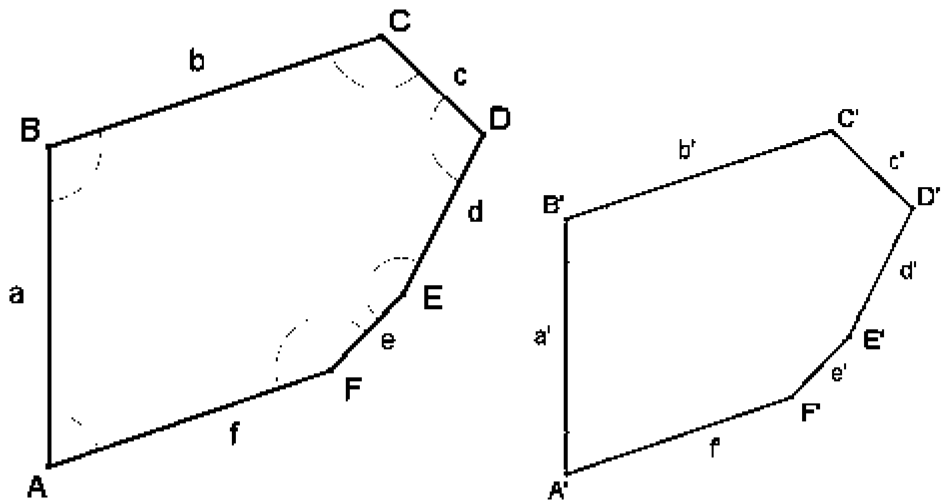
$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

3. **Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen proporcionales la hipotenusa y un cateto.**



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Dos polígonos son semejantes cuando tienen los ángulos homólogos iguales y los lados homólogos proporcionales.



$$\hat{A} = \hat{A}',\ \hat{B} = \hat{B}',\ \hat{C} = \hat{C}',\ \hat{D} = \hat{D}',\ \hat{E} = \hat{E}',\ \hat{F} = \hat{F}'$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} = \frac{f}{f'}$$

Ejercicios:

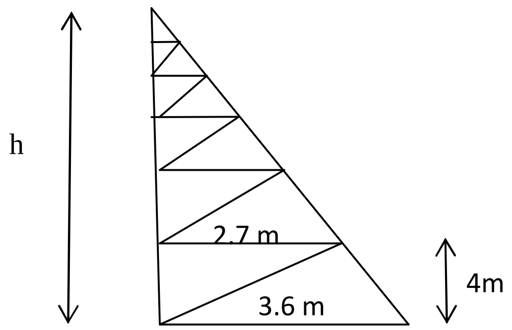
1. La sombra de un edificio en un determinado momento del dia mide 192 m. Si en el mismo instante y lugar la sombra de una señal de tráfico de 2.5 m de altura, mide 1.5 m, ¿cuál es la altura del edificio?

2. A un incendio producido en un hospital acude la unidad de bomberos con una escalera de 32 m de longitud que consta de 80 peldaños distribuidos uniformemente.

Al apoyar la escalera sobre la fachada del edificio se observa que el primer peldaño se encuentra a 30 cm del suelo.

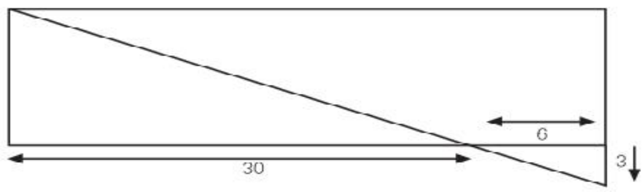
a. ¿Qué altura alcanzara la escalera?
b. Si el fuego se encuentra en el quinto piso y cada piso tiene 4.5 m de altura, ¿podrían ser rescatados los enfermos que allí se encuentran?

3. Una torre del tendido eléctrico tiene la forma de la figura, conocidos los datos que en ella aparecen averigua la altura que alcanza la torre.



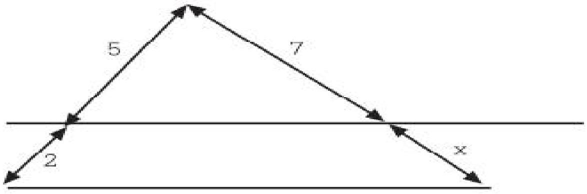
4. En una excursión a una laguna, un grupo de alumnos aprovecharon para medir su anchura según una determinada perspectiva, efectuando así una práctica sobre el teorema de thales. Los datos que tomaron quedan reflejados en el esquema, averigua cual es la anchura de la laguna que resulto de su experiencia.

5. La figura muestra una técnica para medir la anchura de un río sin necesidad de cruzarlo. A la vista de la figura, explica en qué consiste esta técnica y calcula la anchura del río. (Las medidas están tomadas en metros.)

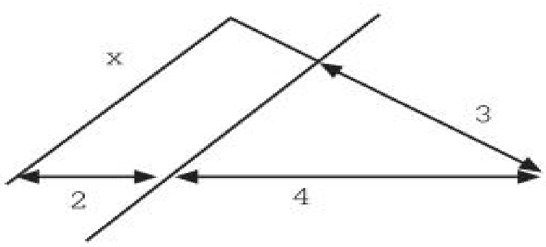


6. Utilizando el Teorema de Thales, encontrar las longitudes del segmento x en las siguientes figuras (las medidas están dadas en cm.):

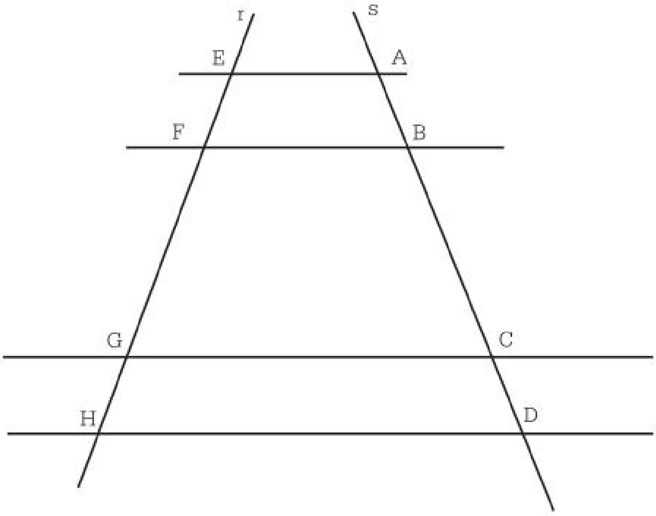
a)



b)



7. Sean r y s dos rectas cortadas por 4 paralelas tal como se indica en la figura:



Si los segmentos BC = 6 cm., CD = 2 cm., EF = 4 cm. y GH = 1,5 cm., calcular la longitud de los segmentos EG, AC y FH.

Tres números con nombre

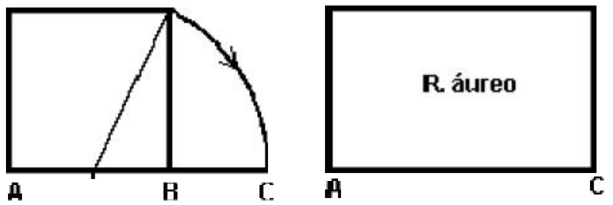
Hay tres números de gran importancia en matemáticas y que "paradójicamente" nombrados con una letra. Estos números son:

- El número designado con la letra griega π= 3,14159....(Pi) que relaciona la longitud de la circunferencia con su diámetro (Longitud = 2. π.radio= π.diámetro).
- El número e = 2´71828......, inicial del apellido de su descubridor Leonhard Euler (matemático suizo del siglo XVIII) que aparece como límite de la sucesión de término general $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
- El número designado con letra griega ϕ= 1,61803... (Fi), llamado número de oro y que es la inicial del nombre del escultor griego Fidias que lo tuvo presente en sus obras.

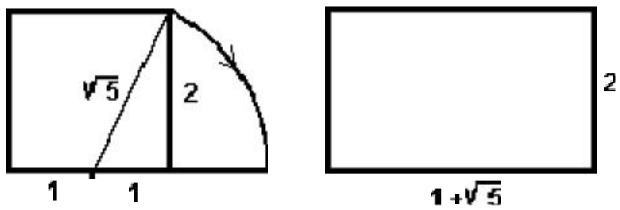
Una diferencia importante desde el punto de vista matemático entre los dos primeros y el número de oro es que los primeros no son solución de ninguna ecuación polinómica (a estos números se les llama trascendentes), mientras que el número de oro si que lo es. Efectivamente, una de las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 - x - 1 = 0$ es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que da como resultado el número de oro.La sección áurea es la división armónica de una segmento en media y extrema razón. Es decir, que el segmento menor es al segmento mayor, como este es a la totalidad. De esta manera se establece una relación de tamaños con la misma proporcionalidad entre el todo dividido en mayor y menor. Esta proporción o forma de seleccionar proporcionalmente una línea se llama proporción áurea.

El rectángulo áureo

Dibujamos un cuadrado y marcamos el punto medio de uno de sus lados. Lo unimos con uno de los vértices del lado opuesto y llevamos esa distancia sobre el lado inicial, de esta manera obtenemos el lado mayor del rectángulo.



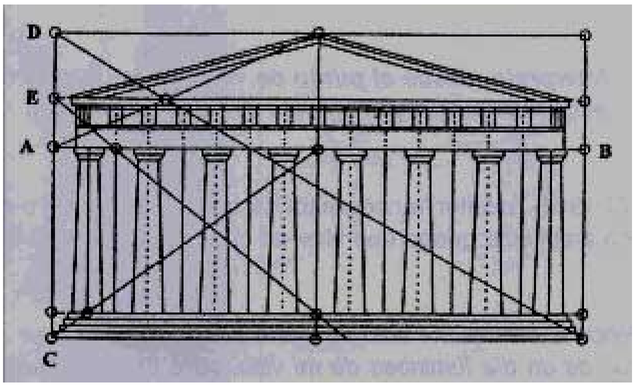
Si el lado del cuadrado vale 2 unidades, es claro que el lado mayor del rectángulo vale $1+\sqrt{5}$ por lo que la proporción entre los dos lados es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nuestro número de oro).



Obtenemos así un rectángulo cuyos lados están en proporción áurea. A partir de este rectángulo podemos construir otros semejantes que, como veremos mas adelante, se han utilizando en arquitectura (Partenón, pirámides egipcias) y diseño (tarjetas de crédito, carnets, cajetillas de tabaco, etc...).

El número de oro en el arte, el diseño y la naturaleza

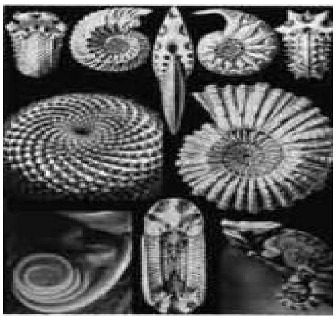
El número áureo aparece, en las proporciones que guardan edificios, esculturas, objetos, partes de nuestro cuerpo, etc. Un ejemplo de rectángulo áureo en el arte es el alzado del Partenón griego.



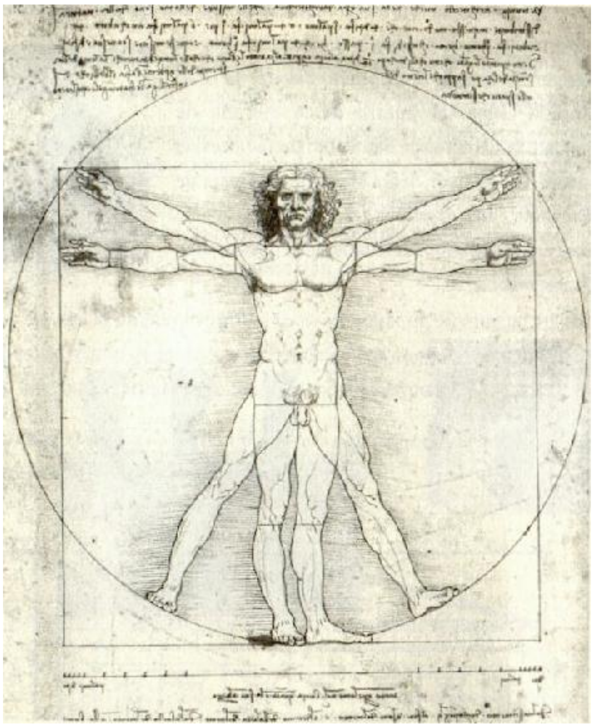
En la figura se puede comprobar que AB/CD= ϕ. Hay más cocientes entre sus medidas que dan el número áureo, por ejemplo: AC/AD= ϕ y CD/CA= ϕ.

Ejemplos de rectángulos áureos los podemos encontrar en las tarjetas de crédito, en nuestro carnet de identidad y también en las cajetillas de tabaco.

El cuadro de Dalí *Leda atómica*, pintado en 1949, sintetiza siglos de tradición matemática y simbólica, especialmente pitagórica. Se trata de una filigrana basada en la proporción áurea, pero elaborada de tal forma que no es evidente para el espectador. En el boceto de 1947 se advierte la meticulosidad del análisis geométrico realizado por Dalí basado en el pentagrama místico pitagórico. En la naturaleza, aparece la proporción áurea también en el crecimiento de las plantas, las piñas, la distribución de las hojas en un tallo, dimensiones de insectos y pájaros y la formación en caracolas.



Unas proporciones armoniosas para el cuerpo, que estudiaron antes los griegos y romanos, las plasmó en este dibujo **Leonardo da Vinci**. Sirvió para ilustrar el libro *La Divina Proporción* de **Luca Pacioli** editado en 1509.



En dicho libro se describen cuales han de ser las proporciones de las construcciones artísticas. En particular, **Pacioli** propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas. Estirando manos y pies y haciendo centro en el ombligo se dibuja la circunferencia. El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo de 90º con el tronco. Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo.