SEGUNDA EDICION DEL CURSO DE CAPACITACION EN MATEMATICA PARA PROFESORES DE PRIMARIA

MODULO IV ESTADISTICA

ENCUENTRO 2 PROBABILIDADES.

ENCUENTRO NÚMERO DOS

1 DE OCTUBRE DE 2014
MANAGUA

FINANCIADO POR: FUNDACIÓN UNO

INTRODUCCIÓN.

El término **probabilidad** se refiere al estudio de la aleatoriedad y la incertidumbre. En cualquier situación donde podría ocurrir uno de varios resultados posibles, la teoría de la probabilidad proporciona métodos para cuantificar las probabilidades. Experiencias que repetidas bajo las mismas condiciones producen generalmente resultados diferentes son llamados aleatorios. Cuando operamos con procesos físicos, biológicos y sociales que generan observaciones que no es posible predecir con exactitud, entonces decimos que estamos ante eventos o sucesos aleatorios. La frecuencia relativa con la cual, ocurren estos sucesos en una gran cantidad de observaciones es a menudo estable. Esto nos da una idea intuitiva, pero significativa de la probabilidad de ocurrencia de un evento aleatorio en una observación futura.

Las aplicaciones formales de la teoría de probabilidad son muchísimas, en nuestro lenguaje habitual nos encontramos expresiones como las siguientes: “Llegue a esa dirección por casualidad”, “Es probable que el próximo semestre se ofrezca ese curso”, “El descubrimiento de la penicilina se debió a un hecho accidental”, “Le ganamos al equipo campeón de chiripa”. “Hay alta probabilidad de lluvia”. Es decir vivimos en un mundo donde la naturaleza está gobernada por la incertidumbre y la probabilidad es una herramienta para medirla

El concepto de probabilidad no tiene aceptación única, a través de la experiencia y de los años la interpretación propuesta por algunos expertos ha sido criticada por otros. El verdadero significado de probabilidad es todavía un tema de conflicto, discutido en la actualidad en foros sobre los fundamentos de la estadística.

En este documento, primero presentaremos conceptos relacionados con experimento aleatorio, para llegar al concepto de probabilidad, sus axiomas y sus lemas y luego se verán algunas técnicas de conteo y teoremas que nos serán útiles en el cálculo de probabilidades.

CONCEPTOS BASICOS

EXPERIMENTO ALEATORIO

Definición: Un experimento aleatorio (al Azar) es un proceso con diversos resultados posibles que no se conocen de antemano o que no pueden predecirse con certeza.
Un **experimento u observación aleatoria** es un proceso que tiene las siguientes propiedades:

i) Se realiza de acuerdo a un conjunto de reglas que determinan completamente su ejecución.
ii) Puede repetirse tan frecuentemente como se desee.
iii) El resultado de cada ejecución depende del azar, es decir de factores que no pueden controlarse y por tanto no puede predecirse de manera única.

Ejemplos:

- Lanzamiento de una moneda 10 veces. ¿Cuántos escudos caen?
- Seleccionar una muestra de 100 estudiantes de un colegio. ¿A cuántos les gustará la materia de matemática?
- Observar diariamente la temperatura en un cierto punto al mediodía durante 90 días. ¿En cuántos días pasa de 32 grados?
- Medir el tiempo para ir de la casa al trabajo en una mañana en particular

¿Qué otros ejemplos podemos dar?

ESPACIO MUESTRAL

Definición: El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se denomina espacio muestral, lo denotaremos con la letra "*S*".

Ejemplos: Consideremos los siguientes experimentos

1. El experimento que consiste en examinar un solo fusible para ver si esta defectuoso. El espacio muestral para este experimento, se puede abreviar como $S = \{b, d\}$ donde "b" se utiliza para indicar que el fusible esta bueno, "d" defectuoso.

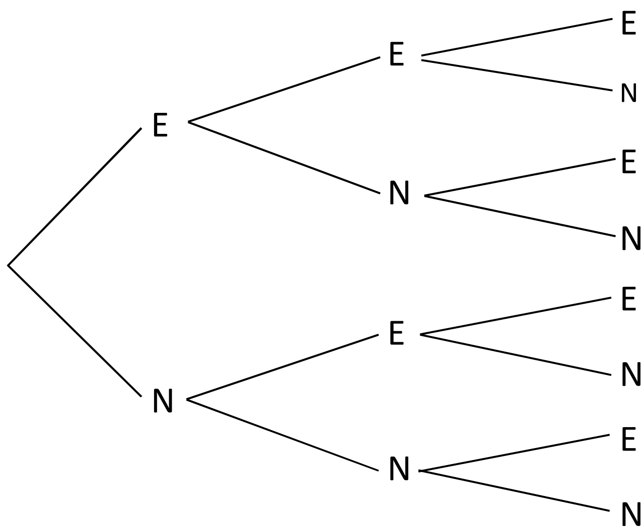
2. Lanzamiento de una moneda, el espacio muestral es:
$$S = \{E,\ N\}$$, donde: E: Escudo; N: Número.
3. Lanzamiento de una moneda tres veces:
$$S = \{EEE,\ EEN,\ ENE,\ NEE,\ NNN,\ NNE,\ NEN,\ ENN\}$$
4. Dos gasolineras se ubican en una cierta intersección. Cada una tiene seis bombas. Considere el experimento en el que para cada gasolinera se determina el número de bombas en uso en determinado momento del día. Un resultado experimental especifica cuantas bombas están en uso en la primera gasolinera y cuantas en la segunda. Un posible resultado es (2,3) esto es, en determinado momento en la primera gasolinera están en uso 2 bombas y en la segunda están en uso 3, otro es (4,5). Los 49 resultados de S los mostramos a continuación. El espacio muestral para el experimento en el que se lanza un dado dos veces, resulta de borrar el renglón 0 y la columna 0 de la tabla, obteniéndose 36 resultados.

		Segunda gasolinera						
	#	0	1	2	3	4	5	6
	0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,6)
	1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
Primera gasolinera	3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,0)	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

En experimentos repetidos, como el anterior, hay una fórmula que nos permite saber cuántos elementos tiene el espacio muestral, la cual se puede expresar como[1]:

X^n: Número de resultados posibles del experimento repetido, donde
X: resultados posibles del experimento
n: veces que se repite el experimento.

Si la moneda se lanzara cinco veces, entonces el total de posibles resultados de este experimento seria: $2^5 = 32$
Otra técnica para conocer el número de elementos y los propios elementos se llama: *Diagrama de árbol*.
Consideremos el ejemplo de la moneda que se lanza tres veces. Construyamos el diagrama de árbol para el experimento de lanzar la moneda tres veces



El número de ramas finales corresponde al número de elementos y los elementos se obtienen recorriendo el árbol desde el comienzo al final de cada rama.

[1] Esta fórmula nos permite conocer el número de elementos del espacio muestral, pero no los elementos.

EVENTO

Definición: Un subconjunto del espacio muestral se denomina evento o suceso, los denotaremos con letras mayúsculas. $A,\ B,\ C,$ etc. Denotarán sucesos.

Ejemplo: Considere un experimento en el que cada uno de tres automóviles que llegan a determinado empalme dan vuelta a la izquierda (I) o a la derecha (D). Los ocho resultados posibles que comprenden el espacio muestral
$S=\{III, IID, IDI, IDD, DII, DID, DDI, DDD\}$.

Así que hay ocho eventos simples, entre los cuales están: $E_1=\{III\}\ y\ E_2=\{IDD\}$.

Algunos eventos compuestos son:

$A=\{DII, IDI, IID\}$, El evento en el que exactamente uno de los tres automóviles da vuelta a la derecha.

$B=\{III, DII, IDI, IID\}$, El evento en el que a lo sumo uno de los automóviles da vuelta a la derecha.

$C=\{DDD, III\}$, El evento en el que los tres automóviles dan vuelta en la misma dirección.

Suponga que cuando se realiza el experimento el resultado es III. Entonces decimos que ocurrió el evento simple E_1 y por lo tanto, también los eventos B y C (pero no A).

Ejemplo Cuando se observa el número de bombas en uso en cada una de las dos gasolineras provistas con seis bombas cada una, hay 49 eventos simples:

$E_1=\{(0,0)\}, E_2=\{(0,1)\},\ldots, E_{49}=\{(6,6)\}$. Ejemplos de eventos compuestos son:

$A=\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4,(5,5),(6,6)\}$, El evento en el que el número de bombas en uso en ambas gasolineras es el mismo.

$B=\{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$, El evento en el que el número de bombas en uso es cuatro.

$C=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$, El evento en el que a lo sumo una bomba esta en uso.

Ejemplo Durante la inspección de un lote de bujías las cuales pueden estar, en buen estado (B), con el filamento roto(R) o con el vidrio quebrado(Q). Si extraemos dos bujías consecutivamente, los nueve resultados posibles que forman el espacio muestral S son:

$S=\{(B,B),(B,R),(B,Q),(R,B),(R,R),(R,Q),(Q,B),(Q,R),(Q,Q)\}$.

Ejemplo En el lanzamiento de un dado, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, que ejemplos de sucesos podemos dar.

¿Qué otros ejemplos de sucesos y eventos podemos dar?

Ejercicios:
1. Construir el espacio muestral S de los siguientes experimentos aleatorios.

a) Lanzar una moneda y un dado al mismo tiempo.

b) Seleccionar un número entero entre 10 y 20.

c) Determinar el sexo de un niño al nacer.

d) Contar el número de vehículos que cruzan en una intersección durante un intervalo de tiempo.

e) Dos personas A y B eligen entre los diarios “La Prensa” o el “El Nuevo Diario”.

2. En una baraja de naipes escribe el espacio muestral de los siguientes eventos
   a) Tomamos una carta y anotamos:
      i. El número o letra.
      ii. El palo o tipo.
      iii. Extraemos dos cartas y anotamos el palo de cada una.
   b) Tomamos 5 cartas:
      i. Que salga un par.
      ii. Que salgan dos pares.
      iii. Un trio.
3. Supongamos que se lanza una moneda cuatro veces. Describir los siguientes sucesos:
   A: “obtener al menos un escudo en los cuatro lanzamientos”
   B: “obtener un escudo en el segundo lanzamiento”
   C: “obtener número en el tercer lanzamiento”
   D: “no obtener números”.

PROBABILIDAD

Para describir cuantitativamente el grado de posibilidad objetiva de que se produzca uno u otro suceso observable de un experimento, se cuenta con la función numérica $P(A)$, llamada probabilidad del suceso *A*.

i. Si estamos seguros que el suceso ocurrirá decimos que su probabilidad es 1, (suceso seguro).
ii. Si estamos seguros que no ocurrirá, decimos que su probabilidad es cero (suceso imposible).
iii. Afirmar que la probabilidad de un suceso es 0.25, significa que hay un 25% de posibilidades de que ocurra y un 75% de que no ocurra; es decir que ocurrirá con un promedio de 1 cada 4 veces.

Hay dos procedimientos para asignar o estimar la probabilidad de un suceso.

ENFOQUE CLASICO

La interpretación clásica de probabilidad está fundamentada en el concepto de resultados igualmente probables o verosímiles. Ejemplo: cuando se lanza una moneda existen dos resultados posibles: escudo o número, si se lanza un dado existen 6 resultados posibles.

La ocurrencia de estos resultados se considera equiprobable. La suma de las probabilidades de todos los resultados posibles tiene que ser uno (1), por lo tanto la probabilidad de escudo o de número es $1/2$. Generalizando lo anterior: consideremos un proceso con *n* resultados diferentes y si estos resultados son igualmente probables, entonces la probabilidad de la ocurrencia de cada resultado será $1/n$. (¿En el caso del dado cual es la probabilidad de cada evento?)

CONCEPTO DE PROBABILIDAD CLASICA

Definición: Si un suceso *A* puede ocurrir de *n* maneras diferentes de un total de *N* maneras posibles, todas "igualmente probables", entonces:

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{\text{números de casos favorables}}{\text{números de casos posibles}}$$

¿Qué se entiende con este concepto?

Ejercicio:

1. Hallar la probabilidad de los eventos A, B y C en los ejemplos de los tres automóviles que llegan al empalme y el de las dos gasolineras.

2. Tres personas *A*, *B* y *C* participaron en un juego sin posibilidad de empate, de tal forma que la probabilidad de que *A* gane es el doble de la de *B* y la probabilidad de que *B* gane es el triple de la de *C*. Calcular: $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$.

3. Considere un experimento que consiste en lanzar una moneda equilibrada y un dado equilibrado.
   a. Describir el espacio muestral para este experimento.
   b. Determinar la probabilidad de obtener un escudo en la moneda y un número impar en el dado.

4. Considere un experimento que consiste en lanzar dos monedas equilibradas y un dado equilibrado.
   a. Describir el espacio muestral para este experimento.
   b. Determinar la probabilidad de obtener:
      i. Al menos un escudo y un número mayor que 4.
      ii. Dos escudos o un número impar.

Como se vio en lo anterior, hay muchos casos en que nombrar a todos los elementos del espacio muestral es demasiado tedioso. Por eso es más importante, en la mayoría de los casos, saber cuántos son los elementos de la muestra y del espacio muestral que saber cuáles son. Por lo que para calcular las probabilidades siguientes usaremos las técnicas de conteo estudiadas en el encuentro anterior.

EJERCICIOS:

1. Se seleccionan dos semillas de un paquete que contiene 7 semillas, dos que producen flores azules, tres que producen flores blancas y dos que producen flores rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas semillas produzcan flores del mismo color?

2. Se van elegir al azar cuatro estudiantes de un grupo formado por tres estudiantes no graduados y cinco estudiantes graduados, para ocupar ciertos puestos en el Consejo Estudiantil: Encuentre la probabilidad de que se encuentren exactamente dos no graduados entre los cuatro escogidos.

3. En un armario hay 5 pares de zapatos. Se eligen 4 zapatos. ¿Cuál es la probabilidad de formar exactamente un par de zapatos?

4. Hay 4 autos estacionados en 6 lugares en fila. Determine la probabilidad de:
    a. Queden dos lugares vacíos consecutivos.
    b. Que no haya lugares vacíos consecutivos.

5. Los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se escriben al azar, hallar la probabilidad de:

    a. Los números 3 y 6 siguen uno tras otro en orden arbitrario.
    b. Los lugares pares están ocupados por los números pares.
    c. Los números 5 y 6 están uno al lado del otro en orden de crecimiento

6. La siguiente tabla presenta la distribución de los alumnos de una clase, por sexo y por carrera pretendida

Carrera	Femenino	Varón	Total
Ciencias	15	5	20
Matemáticas	3	7	10
Total	18	12	30

Sean F, V, C y M los eventos, el alumno seleccionado es del sexo femenino, masculino, pretende una carrera de ciencias o de matemáticas, si se escoge un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad:
a. P(M).
b. P(F).
c. P(C) (compare usando P(M)+P(C)=1)

7. Entre cinco aspirantes a puestos de maestros en un instituto a dos se les considera excelentes, y a los demás se les considera buenos. Un gerente escoge al azar dos de los cinco para la entrevista. Calcular la probabilidad de que el gerente escoja:
    a. a los dos excelentes,
    b. por lo menos a uno de los excelentes,

8. Tiramos dos dados, ¿cuál es la probabilidad de cada una de las sumas posibles?.

9. En una tienda de descuento hay una caja con camisetas, de las cuales 4 son blancas, 6 rojas, 5 verdes, 2 amarillas y 3 azules. Un vendedor coge una camiseta al azar. Calcular las probabilidades de que la camiseta:
    a. Sea blanca.
    b. Sea verde o azul.
    c. No sea amarilla
    d. Sea café.

10. En una ciudad el 40% tiene menos de 25 años, el 20% entre 26 y 35 años, el 15% entre 36 y 55 años, el 17% entre 56 y 65 años y el 8% tiene más de 65 años. Se pregunta al azar a una persona su edad. Calcular las siguientes probabilidades:
    a. Tenga menos de 55 años
    b. Tenga menos de 25 años o más de 65 años
    c. Tenga 40 años.

11. Se pulsan 3 teclas numéricas de una calculadora y aparece en la pantalla un numero de 3 cifras. Calcular la probabilidad de que dicho numero sea:
    a. Par
    b. Tenga las 3 cifras iguales
    c. Termine en 6
    d. Sea capicúa.

12. De una baraja de naipes se sacan 5 cartas. Calcular la probabilidad de que:
    a. Las 5 sean números o figuras distintas
    b. Salgan 2 pares.
    c. Salga un trio.
    d. Salga el par de ases y el par de reyes.