Matemática para maestros de secundaria

Fundación Uno

Módulo 1: Álgebra

Autores:
Lic. Félix Salmerón
Ing. Hank Espinoza
Ing. Silvio Duarte

2 de abril de 2016 | **Clase 3 y 4**

Líder en Ciencia y Tecnología

MINED
Un Ministerio en la Comunidad
UNIDA NICARAGUA TRIUNFA!

Índice

1. Productos Notables

A ciertos productos que se pueden obtener de manera directa sin llevar a cabo la multiplicación por el procedimiento general, se denominan **productos notables**.

1.1. Multiplicación

Propiedad distributiva, binomio elevado al cuadrado, suma por diferencia.

1.2. Factorización

Factor común, trinomios, diferencia de cuadrados, diferencia de cubos. Recordemos que la propiedad distributiva para los números reales

$$a(b + c) = ab + ac$$

nos proporciona un método para escribir el producto de un monomio y un binomio como una **suma**. La propiedad distributiva, cuando la leemos de derecha a izquierda, nos brinda un procedimiento para **"factorizar"** una **suma** adecuada (factor común) en un **producto** de un monomio por un trinomio (proceso conocido como **"factorización"**).

$$ab + ac = a(b + c) \Rightarrow \textbf{Factor Común}$$

Ejemplo 1. Factorice

$$4a(2m + 3n) = 8am + 12an \Rightarrow \textbf{Efectuamos el producto}$$
$$8am + 12an = 4a(2m + 3n) \Rightarrow \textbf{Factorizamos la suma}$$

Además, se hace uso muy frecuente de la propiedad distributiva generalizada siguiente:

$$a(b + c + d) = ab + ac + ab$$

La propiedad anterior nos permite **factorizar** un trinomio adecuado (miembro derecho) en un producto de un monomio por un trinomio.

$$ab + ac + ab = a(b + c + d) \Rightarrow \textbf{Factor común}$$

Ejemplo 2.

$$4p^2(2r^3 + 3s^2 - 4t) = 8p^2r^3 + 12p^2s^2 - 16p^2t \Rightarrow \text{Efectuamos el producto}$$
$$8p^2r^3 + 12p^2s^2 - 16p^2t = 4p^2(2r^3 + 3s^2 - 4t) \Rightarrow \text{Factorizamos la suma}$$
$$-8my(4m^2 - 2my + y^2) = -32m^3y + 16m^2y^2 - 8my^3 \Rightarrow \text{Efectuamos el producto}$$
$$-32m^3y + 16m^2y^2 - 8my^3 = -8my(4m^2 - 2my + y^2) \Rightarrow \text{Factorizamos la suma}$$

1.3. Cuadrado de un binomio

La propiedad distributiva, también nos permite expresar el cuadrado de un binomio como una suma. Esto es:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= (a+b)a+(a+b)b\\ &= a^2+ba+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

Es decir:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Representación geométrica: Puesto que el área total es igual a la suma de las partes, el

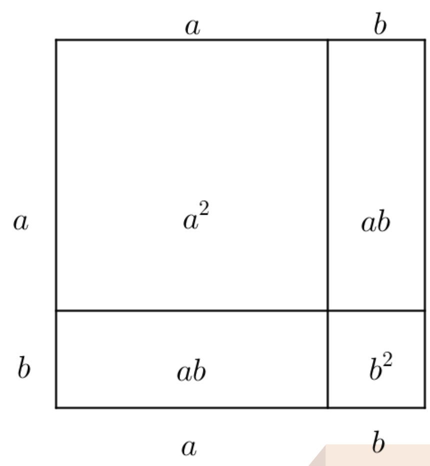


Figura 1: Representación Geométrica

área de la figura la podemos expresar como:
$A =$ suma de las áreas de todas sus partes

$$\begin{aligned}A &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

Y también $A =$ largo $\cdot$ ancho, por consiguiente

$$\begin{aligned}A &= (a+b)(a+b)\\ &= (a+b)^2\end{aligned}$$

Concluimos que

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Ejemplo 3. $(3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

De manera semejante, usando la propiedad distributiva, se obtiene:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= (a-b)a - (a-b)b\\ &= a^2 - ba - ab + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

De modo que

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo 4. $(4r-5s)^2 = (4r)^2 - 2(4r)(5s) + (5s)^2 = 16r^2 - 40rs + 25s^2$

1.4. Trinomio cuadrado perfecto

Si escribimos en forma invertida las dos últimas identidades obtenidas deducimos que

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Estas dos últimas expresiones nos proporcionan las reglas para factorizar dos tipos especiales de trinomios, conocidos como **trinomios cuadrados perfectos**, los cuales son los posibles resultados que se obtienen al elevar un binomio al cuadrado. En consecuencia, factorizar un trinomio cuadrado perfecto significa encontrar el binomio que multiplicado por sí mismo dé como resultado el trinomio cuadrado perfecto dado. Es importante hacer notar las características de un trinomio cuadrado perfecto, a saber, tiene dos términos que son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las raíces cuadradas de los dos términos que son cuadrados perfectos.

Ejemplo 5. Factorice el trinomio $x^2 + 10x + 25$.

Observa que el primer término x^2 es el cuadrado de x; el tercer término 25, es el cuadrado de 5. Si el segundo término $10x$ es el doble producto de x por 5, entonces el trinomio dado es cuadrado perfecto:

$$2(x)(5) = 10x$$

En consecuencia

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$$

Ejemplo 6. Factorice el polinomio $9x^2 - 12xy + 4y^2$.

El primer término $9x^2$ es el cuadrado de $3x$, el tercer término $4y^2$ es el cuadrado de $2y$ y el segundo término ˘$12xy$ es el doble producto de $3x$ por $2y$ donde uno de esos términos es negativo, por lo tanto

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2$$

Nota. Se sugiere al estudiante verificar que la factorización $(-3x+2y)^2$ es válida también.

Ejemplo 7. Factorice el trinomio $\dfrac{9}{4}p^4 + \dfrac{15}{4}p^2q^3 + \dfrac{25}{16}q^6$.

El primer término $\frac{9}{4}p^4$ es el cuadrado de $\frac{3}{2}p^2$, el tercer término $\frac{25}{16}q^6$ es el cuadrado de $\frac{5}{4}q^3$ y el segundo término $\frac{15}{4}p^2q^3$ es el doble producto de $\frac{3}{2}p^4$ por $\frac{5}{4}q^3$

$$2\left(\frac{3}{2}p^2\right)\left(\frac{5}{4}q^3\right) = \frac{15}{4}p^2q^3$$

Por lo tanto

$$\frac{9}{4}p^4 + \frac{15}{4}p^2q^3 + \frac{25}{16}q^6 = \left(\frac{3}{2}p^2 + \frac{5}{4}q^3\right)^2$$

1.5. Producto de binomios conjugados

Ahora consideremos el producto de los siguientes binomios conjugados

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= (a+b)a - (a+b)b \\ &= a^2 + ba - ab + b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Es decir,

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo 8.

$$(4x+5y)(4x-5y) = (4x)^2 - (5y)^2 = 16x^2 - 25y^2$$

Se tiene un interés especial en la identidad que se obtiene al invertir el producto de los binomios conjugados, esto es:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Entonces factorizar una diferencia de cuadrados es buscar dos binomios conjugados cuyo producto sea la diferencia de cuadrados dada.

Ejemplo 9. Factorice la expresión $16x^2 - 25y^2$.

El primer término $16x^2$ es el cuadrado de $4x$, término común en los dos binomios conjugados que se buscan. El segundo término $-25y^2$ es el producto de $5y$ por $-5y$, término simétrico en los dos binomios conjugados que se buscan, por lo tanto:

$$16x^2 - 25y^2 = (4x + 5y)(4x - 5y)$$

A continuación se describen otras formas de determinar los binomios conjugados:

Proposición 1.1. *Obtenga las raíces cuadradas principales de cada término cuadrático.*

Adecuando lo anterior a nuestro ejemplo, debemos encontrar las raíces cuadradas de $16x^2$ y $25y^2$, es decir

$$\sqrt{16x^2} = 4x \quad \sqrt{25y^2} = 5y$$

Los binomios conjugados se forman con la suma y la diferencia de la raíces, es decir:

$$16x^2 - 25y^2 = (4x + 5y)(4x - 5y)$$

Proposición 1.2. *Escriba los términos cuadráticos de la expresión en función de sus raíces elevadas a la potencia 2.*

Escribamos $16x^2 - 25y^2$ como $(4x)^2 - (5y)^2$. Luego sustituyendo en la fórmula principal sobre binomios conjugados a "a" por "$4x$" y a "b" por "$5y$" obtenemos lo que buscamos:

$$16x^2 - 25y^2 = (4x + 5y)(4x - 5y)$$

1.6. Casos especiales de la factorización de una diferencia de cuadrados

Proposición 1.3. *Cuando uno de los binomios conjugados en la factorización es una diferencia de cuadrados, es necesario volver a factorizar dicho factor.*

Así, en la factorización de $81p^4 - 16q^4$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
81p^4 - 16q^4 &= (9p^2)^2 - (4q^2)^2 \\
&= (9p^2 + 4q^2)(9p^2 - 4q^2) \\
&= (9p^2 + 4q^2)[(3p)^2 - (2q)^2] \\
&= (9p^2 + 4q^2)(3p + 2q)(3p - 2q)
\end{aligned}$$

Proposición 1.4. *Cuando un polinomio se puede expresar como una diferencia de cuadrados agrupando adecuadamente algunos de sus términos.*

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
-x^2 - y^2 + 49z^2 + 2xy &= 49z^2 - (x^2 - 2xy + y^2)\\
&= (7z)^2 - (x-y)^2\\
&= [7z + (x-y)][7z - (x-y)]\\
&= (7z + x - y)(7z - x + y)\\
&= (x - y + 7z)(-x + y + 7z)
\end{aligned}$$

Proposición 1.5. *Cuando un polinomio se puede expresar como una diferencia de cuadrados mediante el artificio de sumar y restar un mismo término.*

Examinemos la expresión $u^4 + u^2v^2 + v^4$. Observe que si el segundo término fuera $2u^2v^2$ tendríamos un trinomio cuadrado perfecto, factorizado por $(u^2 + v^2)^2$. Si sumamos y restamos el término u^2v^2, se obtiene:

$$\begin{aligned}
u^4 + u^2v^2 + v^4 &= (u^4 + 2u^2v^2 + v^4) - u^2v^2\\
&= (u^2 + v^2)^2 - (uv)^2\\
&= (u^2 + v^2 + uv)(u^2 + v^2 - uv)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$u^4 + u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2 + uv)(u^2 + v^2 - uv)$$

1.7. Producto de dos binomios que tienen un término común y factorización de un trinomio de la forma $x^2 + mx + n$

Podemos comprobar fácilmente que el producto de dos binomios que tienen un término en común tales como $(x + a)(x + b)$ dan como resultado:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b) + ab$$

Si sustituye $(a + b)$ por m y ab por n, obtenemos:

$$x^2 + mx + n = (x + a)(x + b)$$

esto significa que el trinomio $x^2 + mx + n$ se puede factorizar como el producto de dos factores binomios tales que su primer término es x, sus segundos términos son dos números cuya suma algebraica es m y cuyo producto es n.

Ejemplo 10. Factorice la expresión $x^2 + 8x + 15$.

Como el producto $ab = +15$ es positivo, esto nos indica que los factores deben tener el mismo signo y como la suma $a + b = +8$ es positiva, entonces los dos son positivos.

Los factores de 15 son: 15 y 1; 5 y 3. Estos últimos son los números buscados ya que 5 + 3 = 8.

Por lo tanto:

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$$

Ejemplo 11. Factorice la expresión $x^2 - 8x + 15$.

Para que el producto $ab = +15$ sea positivo, entonces los factores a y b deben tener el mismo signo. Para que la suma algebraica sea negativa $a + b = -8$, los dos sumandos deben ser negativos.

Los factores de 15 bajo estas condiciones son: -15 y -1; -5 y -3, por lo tanto los factores de $+15$ que sumados dan -8 son -5 y -3. Luego:

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 5)(x - 3)$$

Ejemplo 12. Factorice $x^2 + 3x - 10$.

El producto es negativo, por lo tanto, los factores tienen signos opuestos, además los factores de -10 que sumados dan $+3$ son $+5$ y -2. Esto nos conduce a que:

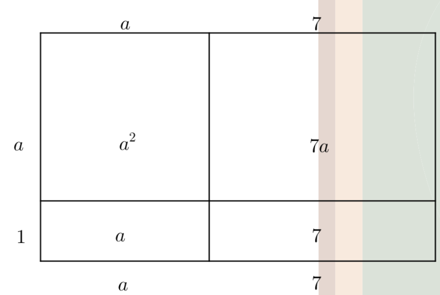
$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$$

Ejemplo 13. Factorice la expresión $x^2 - 3x - 10$.

El producto $ab = -10$ es negativo, por lo tanto, los factores tienen diferente signo, y los factores de -10 que sumados algebraicamente dan -3 son -5y $+2$. Por lo tanto

$$x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$$

Ejemplo 14. Factorice la expresión $a^2 + 8a + 7$.



Puesto que el total es igual a la suma de las partes el área de la figura A la podemos expresar como

A: suma de las áreas de todas sus partes

$$\begin{aligned} \text{A} &= a \cdot a + 7 \cdot a + 1 \cdot a + 7 \cdot 1 \\ &= a^2 + 8a + 7 \end{aligned}$$

Y también

A: Longitud · ancho
A: $(a+7)(a+1)$
Por tanto $a^2 + 8a + 7 = (a+7)(a+1)$

1.8. Factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

La forma más general del trinomio de segundo grado es $ax^2 + bx + c$. Para factorizar esta expresión se puede recurrir a un procedimiento qu consiste en ensayar con diferentes pares de binomios, lo cual a veces resulta laborioso. Un procedimiento abreviado que es comprobable por medio de la multiplicación de los factores binomios obtenidos, se expone a continuación.

Ejemplo 15. Factoriza la expresión $4x^2 + 8x + 3$

En este caso, el procedimiento consiste en buscar dos números cuyo producto sea 12 (coeficiente de x^2 por el término independiente), y cuya suma algebraica sea 8 (coeficiente de x).

Como el producto y la suma son positivos, entonces los dos números buscados son positivos.

Los factores positivos de 12 son: 12 y 1; 6 y 2; 3 y 4. Los únicos factores cuya suma es 8 son 6 y 2. Con estos dos números, descomponemos el coeficiente de x en el polinomio $4x^2 + 8x + 3$, reescribiéndolo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x + 3 &= 4x^2 + 6x + 2x + 3 \\ &= (4x^2 + 6x) + (2x + 3) \\ &= 2x(2x+3) + (2x+3) \\ &= (2x+3)(2x+1) \end{aligned}$$

Por ende,

$$4x^2 + 8x + 3 = (2x+3)(2x+1)$$

Ejemplo 16. Factoriza la expresión $6x^2 + 5x - 4$.

En este caso deben buscarse dos números cuyo producto sea -24 y cuya suma sea $+5$.

Para que el producto de los dos números buscados sea negativo deben tener signos diferentes, y para que la suma sea positiva se requiere que el factor con mayor valor absoluto sea positivo.

Los factores de -24 con signos diferentes y con el mayor de los factores positivo son 24 y -1; 12 y -2; 8 y -3; 6 y -4. Los únicos factores cuya suma algebraica es $+5$ son 8 y -3. Con estos números el polinomio lo reescribimos y lo factorizamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 6x^2+5x-4 &= 6x^2+8x-3x-4 \\ &= (6x^2+8x)-(3x+4) \\ &= 2x(3x+4)-(3x+4) \\ &= (3x+4)(2x-1) \end{aligned}$$

Así que

$$6x^2+5x-4=(3x+4)(2x-1)$$

1.9. Factorización de suma y diferencia de cubos

Observemos que

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$$

Por lo tanto

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

De manera semejante

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Ejemplo 17. Factoriza $27p^3+64q^3$

$$\begin{aligned} 27p^3+64q^3 &= (3p)^3+(4q)^3 \\ &= (3p+4q)[(3p)^2-(3p)(4q)+(4q)^2] \\ &= (3p+4q)(9p^2-12pq+16q^2) \end{aligned}$$

Ejemplo 18. Factoriza $125u^3-8v^3$

$$\begin{aligned} 125u^3-8v^3 &= (5u)^3-(2v)^3 \\ &= (5u-2v)(5u)^2+(5u)(2v)+(2v)^2] \\ &= (5u-2v)(25u^2+10uv+4v^2) \end{aligned}$$

Ejemplo 19. Factoriza: $x^6 + y^6$

$$\begin{aligned} x^6 + y^6 &= (x^2)^3 + (y^2)^3 \\ &= (x^2 + y^2)[(x^2)^2 - (x^2)(y^2) + (y^2)^2] \\ &= (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) \end{aligned}$$

Ejemplo 20. Factoriza: $r^{12} - s^{12}$

$$\begin{aligned} r^{12} - s^{12} &= (r^4)^3 - (s^4)^3 \\ &= (r^4 - s^4)[(r^4)^2 + r^4s^4 + (s^4)^2] \\ &= (r^4 - s^4)(r^8 + r^4s^4 + s^8) \\ &= (r^2 + s^2)(r^2 - s^2)(r^8 + r^4s^4 + s^8) \\ &= (r^2 + s^2)(r + s)(r - s)(r^8 + r^4s^4 + s^8) \end{aligned}$$

2. El binomio de Newton

El desarrollo de potencias enteras de binomios, de la forma $(x+y)^n$ es conocido desde la antigüedad, sin embargo le corresponde a Sir Isaac Newton (1642 - 1727) el honor de haber establecido su generalización. No importa el valor que tome la potencia n, contamos con reglas fáciles de recordar que nos permiten obtener su desarrollo con relativa facilidad.

Veamos algunos conceptos previos:

Definición 2.1 (Factorial de un número)**.** El factorial de un número entero positivo n, denotado por $n!$, es el producto de él y todos sus antecesores enteros positivos.

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Convencionalmente se toma $1! = 1$ y $0! = 1$

Ejemplo 21. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

En algunas ocasiones, para efectos de simplificar una fracción, es necesario descomponer el factorial de un número n; se tiene:

$$n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1)(n-2)! = n(n-1)(n-2)(n-3)! \text{ etcétera}$$

Así por ejemplo

$$5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3!; \qquad \frac{6!}{8!} = \frac{1}{56}$$

2.1. Números combinatorios

Teorema 2.1. *El número de combinaciones diferentes de k elementos tomados de un conjunto de n elementos diferentes, denotado por $\binom{n}{k}$ ó C_n^k está dado por:*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Por ejemplo $C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 12!} = 10$ Los valores que se obtienen de C_n^k reciben el nombre de números combinatorios. A partir de 2.1 se obtienen los siguientes resultados

Corolario 2.2.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Corolario 2.3.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Al desarrollar $(a \pm b)^n$, donde n es un entero positivo cualquiera, se va obteniendo

$$\begin{array}{lccccccccc}
(x \pm y)^0 = & & & & & 1 & & & & \\
(x \pm y)^1 = & & & & x & \pm & y & & & \\
(x \pm y)^2 = & & & x^2 & \pm & 2xy & + & y^2 & & \\
(x \pm y)^3 = & & x^3 & \pm & 3x^2y & + & 3xy^2 & \pm & y^3 & \\
(x \pm y)^4 = & x^4 & \pm & 4x^3y & + & 6x^2y^2 & \pm & 4xy^3 & + & y^4 \\
\vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

Podemos apreciar que:

Teorema 2.4. *El desarrollo de $(x \pm y)^n$ tiene $(n+1)$ términos.*

Teorema 2.5. *El primer término del desarrollo es x^n y el último y^n.*

Teorema 2.6. *En cada término consecutivo las potencias de x disminuyen en 1, mientras que las potencias de y aumentan en 1. La suma de los exponentes es n.*

Teorema 2.7. *Si el binomio es una suma, todos los términos del desarrollo son positivos y si es una diferencia, los signos de los términos se alternan positivos y negativos.*

Teorema 2.8. *Los coeficientes de los diferentes términos corresponden a los números combinatorios.*

Teorema 2.9. *El k - ésimo término está dado por $T_k = C_n^{k-1} x^{n-k+1} y^{k-1}$.*

Teorema 2.10. *Para n entero, se cumple $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n$.*

3. Triángulo de Pascal

Si consideramos los coeficientes que se obtienen en el desarrollo de $(x+y)^n$ se detectan algunas propiedades interesantes, que entre otras cosas nos permiten "recordar" o reconstruir dichos coeficientes. El siguiente arreglo se debe al célebre matemático francés Blas Pascal (1623-1662) y se conoce como el triángulo de Pascal.

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
(x+y)^0 & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
(x+y)^1 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
(x+y)^2 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
(x+y)^3 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
(x+y)^4 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
(x+y)^5 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
(x+y)^6 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
(x+y)^7 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & & & & & & \vdots
\end{array}
$$

Observemos que

Teorema 3.1. *Siempre se comienza y se termina con 1.*

Teorema 3.2. *El segundo y penúltimo coeficiente corresponde a n.*

Teorema 3.3. *Cada coeficiente es la suma de los coeficientes en el desarrollo que le precede que están colocados por encima.*

Teorema 3.4. *Los coeficientes aparecen en forma simétrica.*

Teorema 3.5. *La suma de los coeficientes de $(x+y)^n$ es $2n$*

Hay otras propiedades interesantes, pero para nuestros propósitos inmediatos éstas son las más significativas.

Ejemplo 22. Obtener el desarrollo de $(2x-3y^2)^4$

Desarrollamos el binomio aplicando las reglas anteriores, dejando indicadas inicialmente las operaciones en cada término. Luego efectuamos dichas operaciones:

$$
\begin{aligned}
(2x-3y^2)^4 &= (2x)^4 - 4(2x)^3(3y^2) + 6(2x)^2(3y^2)^2 - 4(2x)(3y^2)^3 + (3y^2)^4 \\
&= 16x^4 - 4(8x^3)(3y^2) + 6(4x^2)(9y^4) - 4(2x)(27y^6) + 81y^8 \\
&= 16x^4 - 96x^3y^2 + 216x^2y^4 - 216xy^6 + 81y^8
\end{aligned}
$$

Ejemplo 23. Desarrolle $\left(x^2 - \dfrac{2y}{x}\right)^5$.

$$\left(x^2-\frac{2y}{x}\right)^5=\binom{5}{0}(x^2)^5$$

$$-\binom{5}{1}(x^2)^4\left(\frac{2y}{x}\right)+\binom{5}{2}(x^2)^3\left(\frac{2y}{x}\right)^2-\binom{5}{3}(x^2)^2\left(\frac{2y}{x}\right)^3+\binom{5}{4}(x^2)\left(\frac{2y}{x}\right)^4-\binom{5}{5}\left(\frac{2y}{x}\right)^5$$

$$=x^{10}-5x^8\frac{2y}{x}+10x^6\frac{4y^2}{x^2}-10x^4\frac{8y^3}{x^3}+5x^2\frac{16y^4}{x^4}-\frac{32y^5}{x^5}$$
$$=x^{10}-10x^7y+40x^4y^2-80xy^3+80\frac{y^4}{x^2}-\frac{32y^5}{x^5}$$

Ejemplo 24. Hallar el 5to término del desarrollo de $\left(2x^2-\frac{y}{4x}\right)^9$.

Tenemos $n=9$ y $k=5$, y $T_k=C_n^{k-1}a^{n-k+1}\cdot b^{k-1}$ luego

$$T_5=\binom{9}{4}(2x^2)^5\left(\frac{-y}{4x}\right)^4=\frac{63x^6y^4}{4}$$

Ejemplo 25. Hallar el término independiente del desarrollo de $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{3x^2}\right)^{10}$

La expresión "término independiente" significa el término que no lleva variable. Para que esto suceda debe tenerse la variable con exponente cero es decir con igual exponente en el numerador y el denominador. Un camino que tenemos para contestar esta pregunta es desarrollar la potencia del binomio indicado y al final extraer el término buscado, sin embargo esta vía no es la óptima. Lo adecuado es usar la fórmula que nos conduce al k-ésimo término y utilizar la condición referida al exponente de la variable, que para que "desaparezca" debe ser cero. Esto nos permite encontrar la posición que ocupa el término buscado y conociendo ésta, procedemos a calcularlo.

Tenemos $n=10$, k inicialmente desconocida.

$$T_k=\binom{10}{k-1}(x^{\frac{1}{2}})^{10-k+1}\left(\frac{-1}{3x^2}\right)^{k-1}=\binom{10}{k-1}(x)^{\frac{11-k}{2}}\left(\frac{1}{x^{2k-2}}\right)$$

Igualando los exponentes del numerador y el denominador de la variable x resulta $\frac{11-k}{2}=2k-2$, de donde obtenemos $k=3$. Luego el término buscado es el tercero. Sustituyendo los valores de n y k en la fórmula, finalmente obtenemos

$$T_3=\binom{10}{2}(x^{\frac{1}{2}})^8\left(\frac{-1}{3x^2}\right)^2=45\cdot x^4\left(\frac{1}{9x^4}\right)=5$$

Ejercicio 1. En los siguientes ejercicios obtener el término o los términos indicados en el desarrollo correspondiente.

1.1. El quinto término de $(x^2+3)^7$.

1.2. Los dos términos centrales de $\left(x^2-\frac{1}{5}\right)^5$.

1.3. El término central de $\left(\frac{a}{3}+ab\right)^{10}$.

1.4. El término que no contiene x de $\left(3x-\frac{2}{x}\right)^{10}$.

1.5. El término que contiene x^4 de $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^5$.

1.6. El término que contiene x^2y^9 de $(x^2+y^3)^4$.

1.7. El término independiente de $\left(x-\frac{1}{2x^2}\right)^9$.

1.8. El quinto término de $(x^3-\sqrt{y})^{13}$.

1.9. El término central de $(2a^3-b^2)^6$.

1.10. El quinto término de $(a^{\frac{2}{3}}-a^{-1})^n$ sabiendo que es independiente de "a".

4. Expresiones Racionales

Recuerde que el cociente o razón de dos números enteros a y b, $\left(\frac{a}{b}\right)$ $a \neq 0$ es un número racional. El cociente o razón de dos polinomios se llama expresión racional.

Ejemplo 26.

$$\frac{x-y}{x+y}, \quad \frac{2a^2+5}{5a^3-4a}, \quad \frac{u^5v^5-2u^2v+20}{u^3-uv+v^2}$$

Las expresiones racionales se suman, restan, multiplican y dividen, el resultado es siempre una expresión racional. Esto seguramente no sorprende pues se tiene el mismo tipo de experiencia con los números racionales.

Cuando los denominadores son iguales, al igual que en la aritmética, basta sumar o restar, según sea el caso, los numeradores y se escribe el mismo denominador. Si los denominadores son diferentes, amplificamos cada fracción de manera que tengan iguales denominadores como en el caso anterior. Para ello hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores (mcm) que en el caso de las fracciones se conoce como el minimo común denominador (M.C.D). Los nuevos numeradores de las fracciones amplificadas se obtienen dividiendo el M.C.D. entre cada denominador y el resultado se multiplica por su respectivo numerador.

4.1. Multiplicación y división

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}, \quad b,d,c\neq 0$$

Debemos tener cuidado que siempre que sea posible simplificar los resultados obtenidos al realizar las operaciones. Para esto factorizamos todos los numeradores y denominadores, cancelando todos los factores comunes en el numerador y denominador. Al final, efectuamos las operaciones que queden indicadas. Observemos que para dividir, invertimos el divisor, transformando la división en un producto.

4.2. Problemas diversos

Ejercicio 2. Resuelva los siguientes problemas.

2.1. Un brillante estudiante simplificó

$$\frac{x^3+y^3}{x^3+(x-y)^3} \quad \text{como} \quad \frac{x+y}{x+(x-y)}$$

Cancelando todos los números 3. Aunque el procedimiento está errado, demuestre que obtuvo la respuesta correcta.

2.2. Un número de la forma

$$a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\dots}}}$$

Donde $a_k \geq 0$ si $k \geq 1$, se llama una fracción sucesiva. Aquí, los puntos indican un patrón que puede seguir en forma indefinida o bien terminar. Simplifique cada una de las siguientes fracciones sucesivas finitas.

2.2.1.
$$2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$$

2.2.2.
$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$$

2.2.3.
$$x+\frac{1}{x+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}}$$

2.3. Una fracción sucesiva finita representa claramente un numero racional. En forma recíproca se puede representar a todo numero racional como una fracción sucesiva finita. Por ejemplo,

$$\frac{7}{4}=1+\frac{3}{4}=1+\frac{1}{\frac{4}{3}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$$

Encuentre la expresión en fracción sucesiva de cada una de las siguientes fracciones:

2.3.1. $\frac{13}{5}$

2.3.2. $\frac{28}{11}$

2.3.3. $-\frac{5}{4}$

2.4. Factoriza las siguientes expresiones.

2.4.1. $9x^2+18x^3$
2.4.2. $abc+bcx+a^2+ax$
2.4.3. $x^2+8x+16$
2.4.4. $25-4x^2$
2.4.5. $-a^4-5a^3-3a^3$
2.4.6. $mx^2+nx^2-my^2-ny^2$
2.4.7. $100x^4+9y^2-60x^2y$
2.4.8. $36m^4n^2-64m^6n^4$
2.4.9. $3r^3s^3t^3-6r^2s^2t^2+9rst$
2.4.10. $m^2y+mn^2-mxy-n^2s^2$
2.4.11. $49r^4s^2+64p^6q^2+112r^2sp^3q$
2.4.12. p^4-q^4

5. Ecuaciones indeterminadas

Si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones independientes habrá un número ilimitado de soluciones y se dice que las ecuaciones son indeterminadas.

Ejemplo 27. Resolver la ecuación $7x + 12y = 220$ (diofántica), en el campo de los números enteros y positivos.

Dividiendo la ecuación por 7, el menor de los coeficientes, tenemos

$$x + y + \frac{5y}{7} = 31 + \frac{3}{7}$$

de donde,

$$x + y + \frac{5y - 3}{7} = 31$$

como x e y deben de ser enteros , se tendrá que

$$\frac{5y - 3}{7} = entero$$

y por lo tanto

$$\frac{15y - 9}{7} = entero$$

llamando p a este entero se tiene que

$$\frac{y - 2}{7} = p \Rightarrow y = 7p + 2$$

Sustituyendo el valor de y en la ecuación $x + y + \frac{5y-3}{7} = 31$, nos da que $x = 28 - 12p$. Si $p > 2, (p \in \mathbb{Z})$, x toma valores negativos y si $p < 0$, y toma valores negativos. Luego los únicos valores enteros y positivos de x e y se obtienen cuando $p = 0, 1, 2$. La solución completa de la ecuación puede expresarse como sigue:

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 0, \ 1, \ 2 \\ x = 28, \ 16, \ 4 \\ y = 2, \ 9, \ 16 \end{cases}$$

6. Ecuaciones diversas

Toda ecuación que se puede escribir como $ax^2 + bx + c + p\sqrt{ax^2 + bc + c} = q$ puede resolverse por sustitución. Sea $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ y sustituyendo, obtenemos:

$$y^2 + py - q = 0$$

Si α y β son las raíces de esta ecuación, tendremos:

$$\alpha = \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad y \quad \beta = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

y de estas ecuaciones obtendremos cuatro valores para x.

Ejemplo 28. Resolver la ecuación $x^2 - 5x + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 12$

Sumemos 3 a los dos lados de la ecuación, entonces.

$$x^2 - 5x + 3 + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 15$$

Haciendo $y = \sqrt{x^2 - 5x + 3}$ obtenemos $y^2 + 2y - 15 = 0$, cuyas raíces son $y = -5, y = 4$. Luego $3 = \sqrt{x^2 - 5x + 3}$ y $-5 = \sqrt{x^2 - 5x + 3}$, elevando al cuadrado y resolviendo obtenemos de la primera $x = 6$ o $x = -1$, de la segunda $x = \frac{5 \pm \sqrt{113}}{2}$. El primer par satisface la ecuación el segundo no.
Si α y β son ambos positivos los cuatros valores de x satisfacen la ecuación.

Nota. Antes de operar con una ecuación con radicales es conveniente examinar si se puede eliminar algún factor común por división.

Ejemplo 29. Resolver $\sqrt{x^2 - 7x + 10} - \sqrt{x^2 + x - 6} = x - 2$

$\sqrt{x^2 - 7x + 10} - \sqrt{x^2 + x - 6} = x - 2$, sacando el factor común $\sqrt{x - 2}$ en cada término. la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} \sqrt{x - 5} - \sqrt{x + 3} &= \sqrt{x - 2} \\ x - 5 + x + 3 - 2\sqrt{(x - 5)(x + 3)} &= x - 2 \\ x &= 2\sqrt{x^2 - 2x - 15} \\ 3x^2 - 8x - 60 = 0 \Rrightarrow x = 6 \text{ ó } x &= -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

$x = 6$ no satisface la ecuación.

¿Le falta alguna solución a la ecuación?

Nota. El artificio usado en el siguiente ejemplo es útil algunas veces.

Ejemplo 30. Resolver la ecuación $\sqrt{3x^2 - 4x + 34} + \sqrt{3x^2 - 4x - 11} = 9$

Planteemos la igualdad

$$(3x^2 - 4x + 34) - (3x^2 - 4x - 11) = 45$$

$$(\sqrt{3x^2 - 4x + 34})^2 - \sqrt{3x^2 - 4x - 11}^2 = 45$$

Dividiendo miembro a miembro la igualdad por la ecuación obtenemos

$$\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=5$$

Sumando esta y la ecuación resulta $\sqrt{3x^2-4x+34}=7$, cuyas soluciones son $x=3$ ó $x=-\frac{5}{3}$

Nota. La resolución de una ecuación de la forma $ax^4 \pm bx^3 \pm cx^2 \pm bx + a = 0$, llamadas **ecuaciones recíprocas** porque no se alteran al cambiar x por su recíproco, puede hacerse depender de una ecuación de segundo grado.

Ejemplo 31. Resolver la ecuación $12x^4-56x^3+89x^2-56x+12=0$

Dividiendo por x^2 y volviendo a ordenar

$$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-56\left(x+\frac{1}{x}\right)+89=0$$

Haciendo $x+\frac{1}{x}=z$ entonces $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$ y la ecuación se transforma en

$$12(z^2-2)-56z+89=0$$

$$12z^2-56z+65=0$$

Cuyas soluciones son $z=\frac{5}{2}$ o $z=\frac{13}{6}$, sustituyendo $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ o $\frac{13}{6}$; resolviendo estas ecuaciones hallamos $x=2,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{2}{3}$.

Ejercicio 3. Resolver las siguientes ecuaciones

3.1. $x^2+2\sqrt{x^2+6x}=24-6x$

3.2. $\sqrt{4x^2-7x-15}-\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{x^2-9}$

3.3. $\sqrt{3x^2-2x+9}+\sqrt{3x^2-2x-4}=13$

3.4. $3x^2-4x+\sqrt{3x^2-4x-6}=18$

3.5. $2x^2+21x-11=0$

3.6. $2x^2-6x+4=0$

3.7. Hallar el valor de k para el cual la ecuación $x^2+2(k+2)x+9k=0$ tenga raíces iguales.

3.8. Hallar la condición para que una de las raíces de ax^2+bx+c sea igual a n veces la otra.

3.9. $(x-5)(x-7)(x+6)(x+4)=504$

3.10. $x^4+1{,}3(x^3+x)=2x^2$

3.11. $3^{2x+1}-8(3^x)+5=0$

7. Sistemas de ecuaciones

Veamos como resolver algunos sistemas de ecuaciones (no lineales) con dos incógnitas.

Ejemplo 32. Resolver el sistema

$$x+2+y+3+\sqrt{(x+2)(y+3)}=39$$
$$(x+2)^2+(y+3)^2+(x+2)(y+3)=741$$

Hagamos $x+2=u,\ y+3=v$. El sistema toma la forma

$$u+v+\sqrt{uv}=39 \qquad (1)$$
$$u^2+v^2+uv=741 \qquad (2)$$

Completando cuadrado en (2) obtenemos $(u+v)^2-uv=741$, por lo tanto al dividir (1) y (2) se tiene que $u+v-\sqrt{uv}=19$ (3), de (1) y (3)

$$u+v=29$$
$$\sqrt{uv}=10 \Rrightarrow uv=100$$

De donde,

$$u=25 \text{ ó } 4; \quad v=4 \text{ ó } 25$$
$$x=23 \text{ ó } 2; \quad y=1 \text{ ó } 22$$

Ejemplo 33. Resolver el sistema

$$x^4+y^4=82$$
$$x-y=2$$

Hagamos $x=u+v,\ y=u-v$, sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos $v=1$. Sutituyendo en la primera

$$(u+1)^4+(u-1)^4=82$$
$$2(u^4+6u^2+1)=82$$
$$u^4+6u^2-40=0$$

De donde

$$u^2=4 \quad \text{ó } -10$$
$$u=\pm 2 \quad \text{ó} \pm\sqrt{-10}$$

Luego

$$x=3,\ -1,\ 1\ \pm\sqrt{-10}$$
$$y=1,\ -3, 1\pm\sqrt{-10}$$

Ejemplo 34. Resolver el sistema

$$4x^3 + 3x^2y + y^3 = 8$$

$$2x^3 - 2x^2 + xy^2 = 1$$

Hagamos $y = mx$ y sustituyamos este valor en ambas ecuaciones; factorizando tendremos:

$$x^3(4 + 3m + m^3) = 8 \qquad (1)$$
$$x^3(2 - 2m + m^2) = 1 \qquad (2)$$

Diviendo ambas ecuaciones,

$$\frac{4 + 3m + m^3}{2 - 2m + m^2} = 8$$
$$m^3 - 8m^2 + 19m - 12 = 0$$

Es decir

$$(m-1)(m-3)(m-4) = 0$$

De donde

$$m = 1,\ 3,\ 4$$

Para $m = 1$ las ecuaciones (1) y (2) nos dan

$$x^3 = 1 \Rrightarrow x = 1$$

$$y = mx = x = 1$$

Análogamente para los otros valores de m obtenemos que la solución completa es

$$x = 1,\ \sqrt[3]{\frac{1}{5}},\ \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$$

$$y = 1,\ 3\sqrt[3]{\frac{1}{5}},\ 4\sqrt[3]{\frac{1}{10}}$$

Nota. El método anterior puede usarse siempre que las ecuaciones sean del mismo grado y homogéneas.

8. Una identidad algebraica

Muchas identidades algebraicas son derivadas del siguiente problema.

Ejemplo 35. Factorizar $a^3+b^3+c^3-3abc$.

Sea el polinomio $p(x)$ de tercer grado, con las raíces $a,\ b,\ c$:

$$p(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$$

Como $a,\ b,\ c$ son raíces de $p(x)$ satisfacen que:

$$p(x)=a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc$$
$$p(x)=b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc$$
$$p(x)=c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc$$

Sumando las tres igualdades, obtenemos

$$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)(a+b+c)-3abc=0$$

Luego,

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

De lo anterior podemos sacar el siguiente resultado: si $a+b+c=0$ entonces $a^3+b^3+c^3=3abc$ Ahora aplicaremos lo anterior en los siguientes ejercicios.

Ejemplo 36. Factorizar $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

Sea $a=x-y,\ b=y-z,\ c=z-x$, entonces, tenemos que $a+b+c=0$, luego como ya lo mostramos en el problema anterior, $a^3+b^3+c^3=3abc$, por tanto la factorización es

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

Ejemplo 37. Probar que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ es un número racional.

Sea $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ .Entonces tenemos

$$x-\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=0$$

Si hacemos $a=x,\ b=-\sqrt[3]{2+\sqrt{5}},\ c=-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, esto implica que

$$x^3-(2+\sqrt{5})-(2-\sqrt{5})=3x\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}$$
$$x^3+3x-4=0$$

Como la suma de los coeficientes es cero, $x=1$, es una raíz de la ecuación. Las otras raíces satisfacen la ecuación $x^2+x+4=0$, la cual no tiene solución real. Entonces podemos concluir que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$

9. Parametrización

Iniciaremos con el siguiente problema.

Ejemplo 38. Resolver la ecuación $x^3(x+1) = 2(x+a)(x+2a)$, donde a es un número real.

La ecuación es equivalente a $x^4 + x^3 - 2x^2 - 6ax - 4a^2 = 0$, como es una ecuación de cuarto grado es difícil de resolver. Cuando tomamos a como incógnita y x como un parámetro entonces la ecuación puede escribirse como una cuadrática.

$$4a^2 + 6ax - x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$$

Cuyo discriminante es

$$36x^2 + 16(x^4 + x^3 - 2x^2) = 4x^2(2x+1)^2$$

Luego,

$$a_{1,2} = \frac{-6x \pm [2x(2x+1)]}{8}$$

Entonces

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \\ a_2 = -\frac{1}{2}x^2 - x \end{cases} \qquad (1)$$

Resolviendo para (1)

$$\begin{aligned} 4a^2 + 6ax - x^4 - x^3 + 2x^2 &= (a-a_1)(a-a_2) = 0 \\ &= \left(a - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)\left(a + \frac{1}{2}x^2 + x\right) \\ &= -(x^2 + 2x + 2a)(x^2 - x - 2a) \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos las soluciones

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2a}, \qquad x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+8a}$$

Como las soluciones pertenecen a los números reales deben de cumplir con

$$1 - 2a \geq 0, \quad 1 + 8a \geq 0$$

Por lo tanto $a \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right]$

Ejercicio 4. Analice con detenimiento cada caso que se le presenta.

4.1. Resolver los sistemas

4.1.1.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 84 \\ x - \sqrt{xy} + y = 6 \end{cases}$$

4.1.2.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 = 706 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

4.1.3.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$$

4.1.4.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + xy + xz = 18 \\ y^2 + yz + yx = -12 \\ z^2 + zx + zy = 30 \end{cases}$$

4.2. Resolver en el campo de los números enteros y positivos las ecuaciones:

4.2.1. $3x + 8y = 103$

4.2.2. $41x + 47y = 2191$

4.2.3. Un campesino gastó \$752 en comprar cabras y cerdos; si cada cabra le costo \$37 y cada cerdo \$23, ¿Cuántos animales compró de cada clase?

4.3. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 34 \end{cases}$$

4.4. Sean a, b, c números reales distintos. Probar que la siguiente igualdad no se puede dar

$$\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} = 0$$

.

4.5. Resolver la ecuación $\sqrt{5-x} = 5 - x^2$.

4.6. Factorice $(a + 2b - 3c)^3 + (b + 2c - 3a)^3 + (c + 2a - 3b)^3$.

4.7. Probar que el número $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ es un número racional.