



ENCUENTRO # 15

TEMA: Fracciones algebraicas

CONTENIDOS:

1. Simplificación de fracciones.
2. Multiplicación y división.

Ejercicio Reto

1. Factorice la siguiente expresión:

$$x^9 + 7x^6y^3 + 7x^3y^6 + y^9$$

Simplificación de fracciones algebraicas

Una fracción algebraica contiene literales y se simplifica al factorizar al numerador y al denominador y al dividir aquellos factores que se encuentren en ambas posiciones.

Ejemplo 1.1.

Simplifica la siguiente expresión: $\frac{8a^2+12ab}{8a^2}$

Solución:

Se factorizan tanto el numerador como el denominador si es posible y se simplifican los factores comunes de ambos.

$$\frac{8a^2 + 12ab}{8a^2} = \frac{4a^1(2a + 3b)}{8a^2 \cdot 2a} = \frac{2a + 3b}{2a}$$

Ejemplo 1.2.

Simplifica la siguiente expresión: $\frac{3m}{15m-12m^2}$

Solución:

Se factorizan el numerador y el denominador, simplificando el término que se repite en ambos (3m)

$$\frac{3m}{15m - 12m^2} = \frac{3m^1}{3m^1(5 - 4m)} = \frac{1}{5 - 4m}$$



Ejemplo 1.3.

Simplifica la siguiente expresión: $\frac{6x^2y-12xy^2}{x^2-4y^2}$

Solución:

Se factorizan tanto el numerador como el denominador y se simplifica los factores comunes entre ambos.

$$\frac{6x^2y - 12xy^2}{x^2 - 4y^2} = \frac{6xy(\cancel{x-2y})}{(\cancel{x-2y})(x+2y)} = \frac{6xy}{x+2y}$$

Ejemplo 1.4.

Simplifica $\frac{x^2-6x+9}{x^2+ax-3x-3a}$

Solución:

Se factorizan tanto numerador como denominador y se simplifica los factores comunes entre ambos:

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + ax - 3x - 3a} = \frac{(x-3)^2}{(x+a)(\cancel{x-3})} = \frac{x-3}{x+a}$$

Ejemplo 1.5.

Simplifica la siguiente expresión: $\frac{9x-x^3}{x^4-x^3-6x^2}$.

Solución:

En este caso se debe ordenar el numerador y hacer un cambio de signo en numerador, posteriormente descomponer en factores tanto como sea posible y simplificar.

$$\frac{9x - x^3}{x^4 - x^3 - 6x^2} = \frac{-x^3 + 9x}{x^4 - x^3 - 6x^2} = -\frac{x^3 - 9x}{x^4 - x^3 - 6x^2} = -\frac{\cancel{x}(x-3)(x+3)}{\cancel{x}^2(x-3)(x+2)} = -\frac{x+3}{x(x+2)}$$

NOTA: si se efectúa un cambio de signo en una fracción ya sea en el numerador o denominador entonces el signo de la fracción cambia. Pero si se hace un cambio de signo en el numerador y en el denominador simultáneamente entonces el signo de la fracción se mantiene.



Ejemplo 1.6.

Simplifica la siguiente expresión: $\frac{12 + 37x + 2x^2 - 3x^3}{20 + 51x - 26x^2 + 3x^3}$.

Solución:

Primero se debe ordenar el numerador y denominador, a continuación se realiza un cambio de signo en el numerador, luego se procede con la factorización y por último la simplificación.

$$\begin{aligned} \frac{12 + 37x + 2x^2 - 3x^3}{20 + 51x - 26x^2 + 3x^3} &= \frac{-3x^3 + 2x^2 + 37x + 12}{3x^3 - 26x^2 + 51x + 20} = -\frac{3x^3 - 2x^2 - 37x - 12}{3x^3 - 26x^2 + 51x + 20} \\ &= -\frac{(3x+1)(x+3)(x-4)}{(x-5)(3x+1)(x-4)} = \frac{x+3}{x-5} \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

1. $\frac{2a+2ab}{3a^2b}$
2. $\frac{6a^3b^2}{3a^b-6ab^2}$
3. $\frac{4a^2+12a}{8a^2}$
4. $\frac{6m^3-18m^2-24m}{15m-9m^2}$
5. $\frac{m^3n-m^2n^2}{n^2-m^2}$
6. $\frac{4x^2-12x}{2x^3-2x^2-12x}$
7. $\frac{x^2-3xy-10y^2}{5y^2+4xy-x^2}$
8. $\frac{x^2+7x-78}{x^2-36}$
9. $\frac{n^2-5n+6}{n^2-2n-3}$
10. $\frac{2x^2-xy-6y^2}{3x^2-5xy-2y^2}$
11. $\frac{-x^4+3x^3y-2x^2y^2}{5x^3-4x^2y-xy^2}$
12. $\frac{3x^2+10xy+8y^2}{x^2-xy-6y^2}$
13. $\frac{ab^2m^2-2ab^2mn+ab^2n^2}{abm^2-abn^2}$
14. $\frac{y^3-27x^3}{y^2-xy-6x^2}$
15. $\frac{x^3-1}{x^3-x^2-x-2}$
16. $\frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{x^3-3xy+2y^3}$
17. $\frac{3ax-bx-3ay+by}{by^2-bx^2-3ay^2+3ax^2}$
18. $\frac{a^2+ab-ad-bd}{2a^2b+2ab^2}$
19. $\frac{y^3+y^2-6y}{3ay^2+9ay+2y^2+6y}$
20. $\frac{3x^2-3xy}{yz-xz-yw+xw}$
21. $\frac{w^2+w-2}{x-wx-y+wy}$
22. $\frac{p+1-p^3-p^2}{p^3-p-2p^2+2}$
23. $\frac{2a^3-2ab^2+a^2-b^2}{2ab^2+b^2-2a^3-a^2}$
24. $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+x^2-14x-2}$
25. $\frac{y^3-9y^2+26y-24}{y^3-5y^2-2y+24}$



Multiplicación y división de fracciones

Multiplicación de fracciones algebraicas

Algoritmo para multiplicar fracciones:

- Descomponer en factores si es posible las expresiones de las fracciones que se van a multiplicar (tener en cuenta los cambios de signos).
- Simplificar los factores comunes del numerador de la primera fracción con el denominador de la primera y segunda fracción, también simplificar los factores comunes del numerador de la segunda fracción con el denominador de la primera y segunda fracción.



- Multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \rightarrow \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Ejemplo 2.1.

Multiplica $\frac{2x^2}{3y} \cdot \frac{6y^2}{4x} \cdot \frac{5xy}{2y}$

Solución:

Como los monomios no tienen factorización se simplifican y luego se multiplican.

$$\frac{2x^2}{3y} \cdot \frac{6y^2}{4x} \cdot \frac{5xy}{2y} = \frac{\cancel{2}x^{\cancel{2}x}}{\cancel{3}y_1} \cdot \frac{\cancel{6}y^{\cancel{2}y}}{\cancel{4}x_2} \cdot \frac{5xy}{\cancel{2}y} = \frac{5xy}{2}$$

Ejemplo 2.2.

Efectúa $\frac{m^2+9m+18}{m-5} \cdot \frac{5m-25}{5m+15}$.

Solución:

Primer se factorizan la expresiones, luego se simplifica y multiplican.

$$\frac{m^2 + 9m + 18}{m - 5} \cdot \frac{5m - 25}{5m + 15} = \frac{(m + 6)(\cancel{m + 3})}{\cancel{m - 5}} \cdot \frac{\cancel{5}(m - 5)}{\cancel{5}(m + 3)} = m + 6$$



Ejemplo 2.3.

Realiza la operación siguiente: $\frac{a^2 - 5a + 6}{3a - 15} \cdot \frac{6a}{a^2 - a - 30} \cdot \frac{a^2 - 25}{2a - 4}$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - 5a + 6}{3a - 15} \cdot \frac{6a}{a^2 - a - 30} \cdot \frac{a^2 - 25}{2a - 4} &= \frac{(a-3)\cancel{(a-2)}}{\cancel{3}(a-5)} \cdot \frac{6a}{(a-6)(a+5)} \cdot \frac{\cancel{(a-5)}(a+5)}{\cancel{2}(a-2)} \\ &= \frac{a(a-3)}{a-6} \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Efectúa la multiplicación de las fracciones algebraicas y simplifica:

- $\frac{4a^2}{7x^3} \cdot \frac{14x}{5b^4} \cdot \frac{5b^2}{7a^3}$
- $\frac{5}{x} \cdot \frac{2x}{y^2} \cdot \frac{3y}{10}$
- $\frac{3x}{10y^2} \cdot \frac{5y^4}{14ab} \cdot \frac{7a}{6x^2}$
- $\frac{16ab^2}{5a^2x} \cdot \frac{10x^3}{4b^3} \cdot \frac{2a^2}{3bx}$
- $\frac{3x^3}{4b} \cdot \frac{b^2}{2y^2} \cdot \frac{2y}{3x^3}$
- $\frac{5m+25}{14} \cdot \frac{7m+7}{10m+50}$
- $\frac{b^2-5b+6}{3b-15} \cdot \frac{b^2-25}{2b-4} \cdot \frac{6b}{b^2-b-30}$
- $\frac{2m^3+2mn^2}{2mx^2-2mx} \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x^2-x}{m^2x+n^2x}$
- $\frac{14x^2-21x}{2x-16} \cdot \frac{12x-8}{42x-63}$
- $\frac{30x^3-18x^2}{6x^3+5x^2} \cdot \frac{42x+35}{60x-36}$
- $\frac{7x^2+42x}{3x^2-6x} \cdot \frac{15x-30}{14x^4+84x}$
- $\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6} \cdot \frac{x^2-2x-3}{x^2-4x-5}$
- $\frac{x^2-10x+24}{30+x-x^2} \cdot \frac{x^2-2x-48}{x^2-12x+32}$
- $\frac{8x^2+10x+3}{4x^2+4x+1} \cdot \frac{6x^2+x-1}{9x^2+9x-4}$
- $\frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+12} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-18}$
- $\frac{x^2+9x+18}{2x^2+9x+9} \cdot \frac{2x^2+7x+6}{4x^2+9x+2}$
- $\frac{x^3+2x^2-3x}{4x^2+8x+3} \cdot \frac{2x^2+3x}{x^2-x}$
- $\frac{x^3-27}{a^3-1} \cdot \frac{a^2+a+1}{x^2+3a+9}$
- $\frac{x^2+5x+6}{4x^4+4x} \cdot \frac{8x+8}{x^2-9} \cdot \frac{x^2-5x}{x+2}$
- $\frac{2n^2+5n-3}{n^2-2n-8} \cdot \frac{n^2+4n+4}{6n^2-5n+1} \cdot \frac{3n^2+11n-4}{n^2+5n+6}$

División de fracciones algebraicas

Algoritmo para dividir fracciones:

- La división se transforma en una multiplicación de la primera fracción por el recíproco de la segunda fracción.

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

- Descomponer en factores si es posible las expresiones de las fracciones que se van a multiplicar (tener en cuenta los cambios de signos).



- Simplificar los factores comunes del numerador de la primera fracción con el denominador de la primera y segunda fracción, también simplificar los factores comunes del numerador de la segunda fracción con el denominador de la primera y segunda fracción.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}$$

Diagram showing the cancellation of common factors between the numerator of the first fraction (A) and the denominator of the second fraction (D), and between the denominator of the first fraction (B) and the numerator of the second fraction (C). Arrows indicate the cancellation paths.

- Multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{A \rightarrow C}{B \rightarrow D}$$

Diagram showing the multiplication of the numerators (A and C) and the denominators (B and D) to form a single fraction.

Ejemplo 2.4.

Realiza la siguiente división $\frac{m^2}{3n^2} \div \frac{2m}{n^3}$.

Solución:

Se transforma la división en multiplicación y se simplifica los factores comunes

$$\frac{m^2}{3n^2} \div \frac{2m}{n^3} = \frac{m^{\cancel{2}}}{3\cancel{n}^2} \cdot \frac{n^{\cancel{3}}}{2\cancel{m}} = \frac{mn}{6}$$

Ejemplo 2.5.

Simplifica la siguiente división: $\frac{\frac{3x^2}{(x^2+1)^2}}{\frac{x}{x^2+1}}$.

Solución:

Se transforma la división en multiplicación y se simplifica los factores comunes

$$\frac{\frac{3x^{\cancel{2}}}{(x^2+1)^{\cancel{2}}}}{\frac{x}{x^2+1}} = \frac{3x^{\cancel{2}}}{(x^2+1)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{x^{\cancel{2}}+1}{x} = \frac{3x}{x^2+1}$$

Ejemplo 2.6.

Realiza el siguiente cociente y simplifica: $\frac{a^3 - a}{2a^2 + 6a} \div \frac{5a^2 - 5a}{2a + 6}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{a^3 - a}{2a^2 + 6a} \div \frac{5a^2 - 5a}{2a + 6} &= \frac{a^3 - a}{2a^2 + 6a} \cdot \frac{2a + 6}{5a^2 - 5a} \\ &= \frac{\cancel{a}(a+1)\cancel{(a-1)}}{2\cancel{a}(a+3)} \cdot \frac{2\cancel{(a+3)}}{5\cancel{a}(a-1)} = \frac{a+1}{5a} \end{aligned}$$



Ejemplo 2.7.

Simplifica la siguiente operación: $\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$.

Solución:

$$\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Ejemplo 2.8.

Resuelve la siguiente división: $\frac{4x^2 - y^2}{2x^2 + xy - y^2} \div \frac{6x^2 + 7xy + 2y^2}{3x^2 + 5xy + 2y^2}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - y^2}{2x^2 + xy - y^2} \div \frac{6x^2 + 7xy + 2y^2}{3x^2 + 5xy + 2y^2} &= \frac{4x^2 - y^2}{2x^2 + xy - y^2} \cdot \frac{3x^2 + 5xy + 2y^2}{6x^2 + 7xy + 2y^2} \\ &= \frac{(2x-y)(2x+y)}{(2x-y)(x+y)} \cdot \frac{(3x+2y)(x+y)}{(3x+2y)(2x+y)} = 1 \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Realiza las siguientes operaciones y simplifica tanto como sea posible.

1. $\frac{2x^3}{y^2} \div \frac{8x^5}{3y^3}$
2. $\frac{12a^4b^5}{15x^6y^3} \div \frac{4a^2b}{5x^2y^3}$
3. $\frac{6x^2}{(2x+3)^3} \div \frac{2x^4}{2x+3}$
4. $\frac{12x^5}{(2x^3+1)^{\frac{1}{3}}} \div \frac{2x^2}{(2x^3+1)^{\frac{2}{3}}}$
5. $\frac{4x^3}{3x^2-3xy} \div \frac{x^2}{x^2-y^2}$
6. $\frac{x^3+x}{x^2-x} \div \frac{x^3-x^2}{x^2-2x+1}$
7. $\frac{x^2-9}{x^2+2x-3} \div \frac{x^2+6x-27}{x^2-10x+9}$
8. $\frac{x^2-7x+10}{x^2-6x+5} \div \frac{x^2+5x-14}{x^2+8x+7}$
9. $\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9} \div \frac{x^2+12x+32}{x^2+3x-40}$
10. $\frac{4x^2-23x-6}{3x^2-14x+8} \div \frac{4x^2+25x+6}{x^2+x-30}$
11. $\frac{6x^2-5x+1}{12x^2-x-1} \div \frac{4x^2-8x-5}{8x^2+6x+1}$
12. $\frac{x^2-16}{x^3-3x^2+9x} \div \frac{x^2-x-12}{x^3+27}$
13. $\frac{8x^2-2x-3}{16x^3-9x} \div \frac{4x^2-1}{4x^2+3x}$
14. $\frac{x^3-121x}{x^3-49x} \div \frac{x^2-11x}{x+7}$
15. $\frac{x^3+125}{x^2-64} \div \frac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56}$
16. $\frac{a^2-6a}{a^3+3a^2} \div \frac{a^2+3a-54}{a^2+9a}$
17. $\frac{15x^2+7x-2}{25x^3-x} \div \frac{6x^2+13x+6}{25x^2+10x+1}$
18. $\left(1 + \frac{a}{a+b}\right) \div \left(1 + \frac{2a}{b}\right)$
19. $\left(x + \frac{2}{x+3}\right) \div \left(x + \frac{3}{x+4}\right)$
20. $\left(n - \frac{2n-1}{n^2+2}\right) \div \left(n^2 + 1 - \frac{n-1}{n}\right)$
21. $\left(a + b + \frac{b^2}{a-b}\right) \div \left(1 - \frac{b}{a+b}\right)$
22. $\left(1 - \frac{1}{x^3+2}\right) \div \left(x + \frac{1}{x-1}\right)$