**ENCUENTRO # 14**
**TEMA**: Factorizaciones

**CONTENIDOS:**

1. División sintética

2. Combinaciones de casos

# Ejercicio Reto

1. Si se tiene $x^2yz^3 = 7^3$ y $xy^2 = 7^9$ entonces $xyz$
   A)7 B)$7^2$ B)$7^4$ D)$7^6$ E)$7^8$

2. En la sustracción, las letras representan dígitos diferentes: $(8542) - (2BAC) = (D645)$. Determina el valor de $A + B + C + D$
   A)29 B)27 B)30 D)28 E)31

**Definición:**
La división sintética se puede utilizar para dividir una función polinómica por un binomio de la forma $x - c$. Esto nos permite, por ejemplo hallar el cociente y el resto que se obtiene al dividir el polinomio por $x - c$. Además, por el *teorema del resto* al aplicar la división sintética se obtiene el valor funcional del polinomio. También permite encontrar los factores y ceros de un polinomio. Al encontrar los ceros de un polinomio, éste se puede factorizar completamente y expresar como el producto de sus factores lineales. En resumen, la división sintética juega un papel preponderante en la división de un polinomio por un factor lineal de la forma $x - c$.

# División sintética

Dado el polinomio $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ su factorización es de la forma $(x - c)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1}x + b_n)$, donde $b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1}x + b_n$ se continua su descomposición en factores de ser posible, $c$ se obtiene de los divisores del término independiente $b_n$

**Ejemplo 1.1.**

*Descomponer por evaluación* $x^3 - 3x^2 - 4x - 12$

***Solución:***

*Se buscan los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente de* $x^3$. *Divisores de* $12 = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$ *Estos son los posibles valores para los cuales el valor del residuo de la división sintética puede ser cero.*

$$\begin{array}{c|llllll}
 & 1 & & -3 & & -4 & 12 \\
 & \downarrow & & & & & \\
2 & \downarrow & (2)(1) & = 2 & (2)(-1) & = -2 & (2)(-6) \quad = -12 \\ \hline
 & 1 & & -1 & & -6 & 0
\end{array}$$

*Como la última operación es cero se procede a extraer el divisor y el cociente, el polinomio resultante se factoriza de ser posible.*

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 4x - 12 &= (x-2)(x^2 - x - 6) \\ &= (x-2)(x-3)(x+2) \end{aligned}$$

*Este mismo polinomio se puede resolver utilizando otro divisor y al final se obtienen el mismo resultado pero en diferente orden.*

$$\begin{array}{c|llllll}
 & 1 & & -3 & & -4 & 12 \\
 & \downarrow & & & & & \\
3 & \downarrow & (3)(1) & = 3 & (3)(0) & = 0 & (3)(-4) \quad = -12 \\ \hline
 & 1 & & 0 & & -4 & 0
\end{array}$$

*En este caso la Solución: que se obtiene es:*

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 4x - 12 &= (x-3)(x^2 - 4) \\ &= (x-3)(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

*También se podía resolver tomando como divisor* $-2$

$$\begin{array}{c|llllll}
 & 1 & & -3 & & -4 & 12 \\
 & \downarrow & & & & & \\
-2 & \downarrow & (-2)(1) & = -2 & (-2)(-5) & = 10 & (-2)(6) \quad = -12 \\ \hline
 & 1 & & -5 & & 6 & 0
\end{array}$$

*En este caso la Solución: que se obtiene es:*

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 4x - 12 &= (x+2)(x^2 - 5x + 6) \\ &= (x+2)(x-3)(x-2) \end{aligned}$$

**NOTA:**

Un polinomio puede tener tantos divisores como grado que tenga.

**Ejemplo 1.2.**

*Expresa en producto tanto como sea posible:* $x^3 - 4x^2 + 7x - 6$

***Solución:***

*Se extraen los coeficientes y los divisores del término independiente*

*Divisores del término independiente:* $-6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

*Si prueba con los divisores se dará cuenta que el único divisor que hace "0" al resto es el "2"*

$$\begin{array}{c|llllllll} & 1 & & -4 & & 7 & & -6 & \\ & \downarrow & & & & & & & \\ 2 & \downarrow & (2)(1) & = 2 & (2)(-2) & = -4 & (2)(3) & = 6 & \\ \hline & 1 & & -2 & & 3 & & 0 & \end{array}$$

*Por consiguiente* $x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = (x-2)(x^2 - 2x + 3)$, *donde el trinomio* $x^2 - 2x + 3$ *no tiene factorización porque su discriminante es negativo.*

**Ejemplo 1.3.**

*Factoriza tanto como sea posible:* $a^3 - 7a - 6$

***Solución:***

*Se extraen los coeficientes, si falta algún término se ubica en la tabla un cero en su posición*

*Divisores* $-6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$$\begin{array}{c|llllllll} & 1 & & 0 & & -7 & & -6 & \\ & \downarrow & & & & & & & \\ -1 & \downarrow & (-1)(1) & = -1 & (-1)(-1) & = 1 & (-1)(-6) & = 6 & \\ \hline & 1 & & -1 & & -6 & & 0 & \end{array}$$

*Se obtiene:*

$$\begin{array}{rcl} a^3 - 7a - 6 & = & (a+1)(a^2 - a - 6) \\ & = & (a+1)(a-3)(a+2) \end{array}$$

**Ejemplo 1.4.**

*Descomponer en factores tanto como sea posible*

$$m^4 - 4m^3 + 3m^2 + 4m - 4$$

***Solución:***

*En este caso el grado del polinomio es 4 por lo que tendremos que aplicar Ruffini en dos ocasiones.*

*Divisores de* $-8 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

$$\begin{array}{c|llllllllll} & 1 & & -4 & & 3 & & 4 & & -4 & \\ & \downarrow & & & & & & & & & \\ 1 & \downarrow & (1)(1) & = 1 & (1)(-3) & = -3 & (1)(0) & = 0 & (1)(4) & = 4 & \\ \hline & 1 & & -3 & & 0 & & 4 & & 0 & \end{array}$$

*De esto obtenemos:* $m^4 - 4m^3 + 3m^2 + 4m - 4 = (m-1)(m^3 - 3m^2 + 4)$
*Pero el polinomio* $m^3 - 3m^2 + 4$ *es de grado 3 y se le debe aplicar Ruffini para obtener un polinomio de grado 2.*
*Divisores de* $4 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $-3$ | $0$ | $4$ |
| | $\downarrow$ | | | |
| $-1$ | $\downarrow$ | $(-1)(1) \quad = -1$ | $(-1)(4) \quad = 4$ | $(-1)(4) \quad = -4$ |
| | $1$ | $-4$ | $4$ | $0$ |

*De esto se obtiene:*

$$\begin{aligned} m^3 - 3m^2 + 4 &= (m+1)(m^2 - 4m + 4) \\ &= (m+1)(m-2)^2 \end{aligned}$$

*Por consiguiente:* $m^4 - 4m^3 + 3m^2 + 4m - 4 = (m-1)(m+1)(m-2)^2$

## Ejercicios propuestos

Divide las siguientes expresiones utilizando división sintética:

1. $3x^3 + 7x^2 - 4x + 3$ entre $x + 3$
2. $3x^4 - 21x^3 + 31x^2 - 25$ entre $x - 5$
3. $3x^4 - 4x^3 + 8x^2\check{}5x - 5$ entre $x - 2$
4. $2x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 13x - 3$ entre $x - 3$
5. $6x^4 + 13x^3 + 35x - 24$ entre $x + 3$
6. $3x^3 + 7x^2 - 4x + 3$ entre $x + 3$
7. $x^5 - 208x^2 + 2076$ entre $x - 5$
8. $2x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ entre $2x - 1$

## Ejercicios propuestos

1. Factoriza los siguientes polinomios.

   1. $b^3 - b^2 - b - 1$
   2. $w^3 + 2w^2 - w - 2$
   3. $x^3 - 4x^2 + x + 6$
   4. $x^3 + x^2 - 14x - 24$
   5. $m^3 + m^2 - 14m - 24$
   6. $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$
   7. $a^3 - 5a^2 + 8a - 4$
   8. $x^3 - 12x - 16$
   9. $4x^3 - 7x + 3$
   10. $m^3 + 2m^2 + m + 2$
   11. $6y^3 + y^2 - 11y - 6$
   12. $a^4 - 10a^2 + 9$
   13. $3x^3 + 4x^2 - 59x - 20$
   14. $m^4 + 6m^3 + 3m + 140$

15. $n^4 - 2n^3 - 3n^2 + 4n + 4$

16. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$

17. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

18. $z^4 + 6z^3 + 9z^2 - 4z - 12$

19. $y^4 - 11y^2 - 18y - 8$

20. $x^5 - 4x^4 + 10x^2 - x - 6$

21. $a^5 - 30a^3 - 25a^2 - 36a - 180$

22. $2x^5 - 5x^4 - 12x^3 + 23x^2 + 16x - 12$

23. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 32x - 24$

24. $6x^5 + 7x^4 - 47x^3 - 13x^2 + 77x - 30$

25. $n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36$

26. $2x^6 - 3x^5 - 35x^4 - 2x^2 + 3x + 35$