ENCUENTRO # 8
TEMA: Radicales.Propiedades.

CONTENIDOS:

1. Propiedades de las potencias de exponente racional.
2. Radicales.Propiedades.
3. Simplificación de radicales.
4. Operaciones con radicales.

DESARROLLO

Ejercicio Reto

1. ¿En cuál de las siguientes operaciones es incorrecto el resultado de la operación?
   A) $\dfrac{3^0+3^0+3^0}{3^0}=3$
   B) $\dfrac{3^0+3^0+3^0}{3}=3^0$
   C) $\dfrac{3^0+3^0}{3^0}=3^0$
   D) $\dfrac{3+3+3}{3^0}=3^2$
   E) $\dfrac{3+3+3}{3^0+3^0+3^0}=2+3^0$

2. Al calcular la expresión $\dfrac{1.8\cdot 10^{2015}}{2\cdot 8^{2014}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{2014}}$ el resultado es

   A)1 B)$9\cdot 10^{2014}$ C)$3.6\cdot 10^{2015}$ D)9 E)$9\cdot 10^{2015}$

Propiedades de las potencias de exponente racional

Sea $\{a;b\in\mathbb{R}/a>0\wedge b>0\}$ y $\{m,n,p,q\in\mathbb{Z}/n>1\wedge q>1\}$, entonces se cumple que:

1. $a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$
2. $a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}=(ab)^{\frac{m}{n}}$
3. $a^{\frac{m}{n}}\div a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$
4. $a^{\frac{m}{n}}\div b^{\frac{m}{n}}=(a\div b)^{\frac{m}{n}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$
5. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$
6. $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

Ejercicios propuestos

1. Aplica las propiedades de las potencias y simplifica en los casos posibles.

   (a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$

   (b) $a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{4}{6}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$

   (c) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$

   (d) $(x^6)^{\frac{1}{2}}$

   (e) $(x^5)^{-\frac{1}{2}}$

   (f) $\left[a^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{4}{9}}$

   (g) $(2a^4b^6)^{\frac{3}{2}}$

   (h) $a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}}$

Radicales

Definición 1. *Radicación*
Operación que permite hallar un valor que multiplicado tantas veces como lo indica el índice, dé el valor que se encuentra dentro del radical, el cual recibe el nombre de radicando. Para lo anterior se define:

$\sqrt[n]{m} = a^{\frac{m}{n}}$*, donde* a *es el radicando(cantidad subradical),*m *exponente del radicando y* n *índice de la raíz.*

Ejemplo 2.1.
Expresa la siguiente potencia como radical $x^{\frac{2}{3}}$
Solución
La base de la potencia x *es la cantidad subradical, su exponente es 2 y el índice de la raíz es 3.*

$$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$$

Ejemplo 2.2.
Convierte a radical la siguiente expresión $3^{\frac{4}{5}}$
Solución
La base de la potencia 3 es la cantidad subradical, su exponente es 4 y el índice de la raíz es 5.

$$3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{81}$$

Ejemplo 2.3.
Expresa el siguiente radical $\sqrt[7]{2^3}$ *como una potencia.*
Solución
La cantidad subradical es la base de la potencia y su exponente es la división del exponente de la cantidad subradical con el índice de la raíz o sea $\frac{3}{7}$*.*

$$\sqrt[7]{2^3} = 2^{\frac{3}{7}}$$

Ejercicios Propuestos

1. Convierte de potencia a radical o viceversa según el caso.

   (a) $\sqrt[4]{27}$
   (b) $7^{\frac{4}{3}}$
   (c) $81^{\frac{1}{5}}$
   (d) $\sqrt{12}$
   (e) $\sqrt[6]{64}$
   (f) $100^{\frac{1}{2}}$
   (g) $\sqrt[3]{8x^6}$
   (h) $(25y^4)^{\frac{1}{4}}$

Propiedades de los radicales

$$\begin{aligned}
a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} \quad &\Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \\
a^{\frac{1}{n}} \div b^{\frac{1}{n}} = (a \div b)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad &\Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \\
\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} \quad &\Rightarrow \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \\
\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} \quad &\Rightarrow \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \\
a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}} \quad &\Rightarrow \quad \sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}
\end{aligned}$$

Simplificación de radicales

Procedimiento que consiste en expresar un radical en su forma más simple. Para simplificar un radical, el exponente de radicando debe ser mayor que el índice del radical.

Ejemplo 3.1.
Simplifica $\sqrt{8}$
Solución
Se descompone el radicando en factores primos.

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3}$$

El 2^3 *se expresa como* $2^2 \cdot 2$ *y se aplica la propiedad de los radicales* $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Ejemplo 3.2.
Simplifica $\sqrt{45}$
Solución
Se descompone el radicando en factores primos y se procede a aplicar propiedades.

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^3 \cdot 5}\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Por tanto $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Ejemplo 3.3.
Simplifica $\sqrt[3]{72}$
Solución
Se descompone el radicando en factores primos y se simplifica la expresión.

$$\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 2\sqrt[3]{9}$$

Ejemplo 3.4.
Simplifica $\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}$
Solución
Se simplifica el radical y el resultado se multiplica por la fracción para obtener el resultados de la operación.

$$\frac{1}{2}\sqrt[5]{96} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{3} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3}$$

Ejercicios propuesto

1. Simplifica las siguientes expresiones.

(a) $\sqrt{20}$
(b) $\sqrt{72}$
(c) $\sqrt[3]{16}$
(d) $\sqrt[3]{135}$
(e) $\sqrt[3]{250}$
(f) $\sqrt{162}$
(g) $\sqrt{180}$
(h) $2\sqrt[4]{405}$
(i) $\frac{2}{7}\sqrt[3]{648}$
(j) $\frac{1}{3}\sqrt{540}$
(k) $\frac{2}{5}\sqrt[4]{1250}$
(l) $\frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{3600}}$

Operaciones con radicales

Adición y sustracción

Estas operaciones se puede efectuar si y solo si el índice del radical y el radicando son iguales(radicales semejantes)

$$a\sqrt[n]{d} + b\sqrt[n]{d} - c\sqrt[n]{d} = (a + b - c)\sqrt[n]{d}$$

Ejemplo 4.1.
Efectúa $2\sqrt[3]{5} + 11\sqrt[3]{5}$
Solución
Los radicales son semejantes, por tanto se realizan las operaciones con los números que les antecedes(coeficientes del radica).

$$2\sqrt[3]{5} + 11\sqrt[3]{5} = (2 + 11)\sqrt[3]{5} = 13\sqrt[3]{5}$$

Ejemplo 4.2.
¿Cuál es el resultado de la operación $2\sqrt{2}+7\sqrt{2}-4\sqrt{2}$*?*
Solución
Al ser semejantes los radicales solo efectuamos las operaciones con los coeficientes.

$$2\sqrt{2}+7\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(2+7-4)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

Ejemplo 4.3.
Efectúa $\frac{3}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{6}\sqrt{6}$
Solución
Se realizan las operaciones con las fracciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{3}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{6}\sqrt{6}=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\sqrt{6}=\frac{7}{12}\sqrt{6}$$

NOTA: Si los radicales son no semejantes, no se puede sumar o restar los radicales de primer instancia, entonces se simplifican si es posible y si resultan semejantes se efectúa las operaciones, de los contrario se dejan indicadas las operaciones.

Ejemplo 4.4.
¿Cuál es el resultado de $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$*?*
Solución
Se simplifica los radicales y se realizan las operaciones.

$$\begin{aligned}\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}&=\sqrt{2^2\cdot 5}+\sqrt{3^2\cdot 5}-\sqrt{2^4\cdot 5}\\&=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-2^2\sqrt{5}=(2+3-4)\sqrt{5}=\sqrt{5}\end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.
Efectúa $\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}$
Solución
Se simplifican los radicales, se realizan las operaciones y se obtiene el resultado.

$$\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}=\sqrt[3]{3^3\cdot 7}+\sqrt[3]{2^3\cdot 7}=3\sqrt[3]{7}+2\sqrt[3]{7}(3+2)\sqrt[3]{7}$$

Ejercicios propuestos

1. Realiza las siguientes operaciones.

   (a) $5\sqrt{2}-7\sqrt{2}$

   (b) $\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4\sqrt{3}$

   (c) $3\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{5}$

   (d) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{9}$

   (e) $\frac{5}{3}\sqrt[4]{7}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{7}$

   (f) $\sqrt{8}+\sqrt{18}$

(g) $\sqrt{12}+\sqrt{3}$

(h) $2\sqrt{5}+\sqrt{80}$

(i) $4\sqrt{32}-7\sqrt{8}-3\sqrt{18}$

(j) $\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{45}$

(k) $3\sqrt{12}-2\sqrt{5}-7\sqrt{3}+\sqrt{125}$

(l) $\sqrt{200}+\sqrt{50}-\sqrt{98}-\sqrt{338}$

(m) $\frac{1}{4}\sqrt{192}-\frac{2}{5}\sqrt{75}+\frac{1}{7}\sqrt{147}$

(n) $\frac{3}{4}\sqrt{176}-\frac{2}{3}\sqrt{45}+\frac{1}{8}\sqrt{320}+\frac{1}{5}\sqrt{275}$

(o) $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{82}-\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{192}$

(p) $2\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{54}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{375}$

(q) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{250}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{128}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{54}$

Multiplicación

Multiplicación de radicales con índices iguales

Cuando los índices de los radicales son iguales, se multiplican los radicandos y de ser posible se simplifica el resultados

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}$$

Ejemplo 4.6.
Efectúa $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$
Solución
Se multiplican los radicandos

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{3\cdot 5}=\sqrt{15}$$

Ejemplo 4.7.
¿Cuál es el resultado del producto $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$*?*
Solución
Se realiza el producto y se simplifica el resultado.

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{6\cdot 2\cdot 3}=\sqrt{36}=6$$

Ejemplo 4.8.
Realiza $\left(2\sqrt[3]{4}\right)\left(3\sqrt[3]{10}\right)$.
Solución
Se multiplica y simplifica el resultado.

$$\begin{aligned}\left(2\sqrt[3]{4}\right)\left(3\sqrt[3]{10}\right)&=(2\cdot 3)\sqrt[3]{4\cdot 10}=6\sqrt[3]{40}\\&=6\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=6\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}}\sqrt[3]{5}\end{aligned}$$

Multiplicación de radicales con índices diferentes

Para multiplicar radicales con índices diferentes se busca un índice común, que resulta del mínimo común múltiplo de los índices de los radicales y recibe el nombre de *mínimo común índice*

Ejemplo 4.9.
¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}$*?*
Solución
El mínimo común índice es 6, entonces los índices de los radicales se convierten a dicho índice. $\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\cdot 2]{(2)^2}=\sqrt[6]{2^2}$ $\qquad \sqrt{5}=\sqrt[2\cdot 3]{(5)^3}=\sqrt[6]{5^3}$
Se efectúa el producto y se observa que no se puede simplificar el radical, por consiguiente se desarrollan las potencias y se realiza la multiplicación.

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{2^2\cdot 5^3}=\sqrt[6]{4\cdot 125}=\sqrt[5]{500}$$

Ejemplo 4.10.
Efectúa $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}$
Solución
Se descompone el 8 en factores primos y el mínimo común índice es 4, por tanto, al transformar los radicales se obtiene. $\sqrt{2}=\sqrt[2\cdot 2]{(2)^2}=\sqrt[4]{2^2}$ $\qquad \sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}$
Se efectúa la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{2^5}=\sqrt[4]{2^2\cdot 2}=\sqrt[\cancel{4}]{2^{\cancel{4}}}\cdot\sqrt[4]{2}=2\sqrt[4]{2}$$

Ejercicios propuestos

1. Realiza las siguientes multiplicaciones.

(a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$
(b) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$
(c) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}$
(d) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{27}$
(e) $(2\sqrt{2})(5\sqrt{6})(\sqrt{12})$
(f) $\sqrt[3]{15}\cdot\sqrt[3]{9}$
(g) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}$
(h) $\sqrt[5]{96}\cdot\sqrt[3]{3}$
(i) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$
(j) $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}$
(k) $(3\sqrt[3]{4})(2\sqrt[4]{5})$
(l) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)\left(\frac{2}{6}\sqrt[6]{12}\right)$
(m) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{6}\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}\right)$

División de radicales

4.0.1 División de radicales con índices iguales

Se realiza de forma análoga a la multiplicación de radicales con indices iguales.

Ejemplo 4.11.
Realiza $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$
Solución
Los radicales son de igual índice, entonces se dividen los radicandos.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$$

Ejemplo 4.12.
¿Cuál es el resultado de $\frac{6\sqrt{28}}{\sqrt{63}}$*?*
Solución
Se simplifican los radicales y se realiza la operación.

$$\frac{6\sqrt{28}}{\sqrt{63}} = \frac{6\sqrt{2^2\cdot 7}}{\sqrt{3^2\cdot 7}} = \frac{6\sqrt{2^2}\cdot \cancel{\sqrt{7}}}{\sqrt{3^2}\cdot \cancel{\sqrt{7}}} = \frac{6\cdot 2}{3} = 4$$

División de radicales con índices diferentes

Se transforman los radicales a una índice común y después se realiza la división.

Ejemplo 4.13.
Halla el cociente de $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}}$.
Solución
Se transforman los índices de los radicales a 12 y se efectúa la operación.

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[4\cdot 3]{(2^3)^3}}{\sqrt[3\cdot 4]{(2^2)^4}} = \frac{\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^9}} = \sqrt[12]{\frac{2^9}{2^8}} = \sqrt[12]{2}$$

Ejemplo 4.14.
¿Cuál es el resultado de $\frac{6\sqrt{12}+2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}$*?*
Solución
Se divide cada término del numerador entre el denominador y se obtiene:

$$\frac{6\sqrt{12}+2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{12}}{2\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt{\frac{12}{3}} + \frac{\sqrt[3\cdot 2]{(2\cdot 3)^2}}{\sqrt[2\cdot 3]{3^3}} = 3\sqrt{4} + \frac{\sqrt[6]{2^2\cdot 3^2}}{\sqrt[6]{3^3}}$$
$$= 3(2) + \sqrt[6]{\frac{2^2\cdot 3^2}{3^3}} = 6 + \sqrt[6]{\frac{4}{3}}$$

Ejercicios popuestos

1. Realiza las siguientes operaciones:

(a) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$
(b) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$
(c) $\frac{5\sqrt{120}}{6\sqrt{40}}$
(d) $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}$
(e) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[3]{4}}$
(f) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$
(g) $\frac{\sqrt[7]{6}}{\sqrt[14]{3}}$
(h) $\frac{\sqrt{200}-\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$
(i) $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[6]{6}}{\sqrt{2}}$
(j) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}$
(k) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[5]{16}}{\sqrt{8}}$

Introducir una cantidad a un radical

Para introducir una cantidad en un radical esta se debe elevar a un exponente igual al índice del radical.

Ejemplo 4.15.
Introduce el elemento en el radical $\frac{\sqrt{48}}{2}$.
Solución
El divisor se expresa como $2 = \sqrt{2^2}$ *y se realiza la operación para obtener el resultado.*

$$\frac{\sqrt{48}}{2} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{2^2}} = \sqrt{\frac{48}{2^2}} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Ejemplo 4.16.
Introduce el factor en el radical.
$a \cdot \sqrt[5]{b^3c^2}$
Solución
Se expresa a *como* $a = \sqrt[5]{a^5}$ *y luego se multiplican los radicales.*

$$a \cdot \sqrt[5]{b^3c^2} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{b^3c^2} \cdot \sqrt[5]{5^5b^3c^2}$$

Ejercicios propuestos

1. Introduce el factor en el radical

(a) $5\sqrt{3}$
(b) $x^2y\sqrt[3]{z}$
(c) $2x\sqrt[3]{4y}$
(d) $a\sqrt[6]{\frac{3x}{a^2}}$ $(x \geq 0, a \neq 0)$
(e) $\frac{1}{3}x\sqrt[3]{6a}$
(f) $(a+b)\sqrt[3]{a-b}$ $(a > b, b \geq 0)$
(g) $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$ $(a > b > 0)$
(h) $(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ $(x > 0, y > 0, x > y)$

Racionalización

Racionalizar es representar una fracción en otra equivalente que contenga una raíz en el numerador, cuyo numerador o denominador sea un número racional respectivamente.

Racionalización del denominador

Dada una expresión de la forma $\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}$, se racionaliza de la siguiente manera:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{c}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{c \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}} = \frac{c \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{c \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

Ejemplo 5.1.
Transforma $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en otra expresión equivalente que carezca de raíz en el denominador.
Solución
La fracción $\frac{1}{\sqrt{3}}$ se multiplica por $\sqrt{3^{2-1}} = \sqrt{3}$ tanto denominador como numerador.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 5.2.
Racionaliza la expresión $\sqrt{\frac{2}{5}}$.
Solución
Se debe separar la expresión en raíces y se multiplican por $\sqrt{5^{2-1}} = \sqrt{5}$ tanto numerador como denominador, para obtener el resultado.

$$\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Racionalización de un denominador binomio

Para racionalizar una fracción cuyo denominador es un binomio $(a \pm b)$ y alguno o ambos elementos tienen una raíz cuadrada, se multiplica por el conjugado del binomio $(a \mp b)$.

$$\frac{c}{a \pm b} = \frac{c}{a \pm b} \cdot \frac{a \mp b}{a \mp b} = \frac{c(a \mp b)}{a^2 - b^2}$$

Ejemplo 5.3.

Racionaliza la expresión $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

Solución

Se multiplica el numerador y el denominador de la expresión por $1-\sqrt{2}$ *que es el conjugado del denominador* $1+\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{3(1-\sqrt{2})}{(1)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{3-3\sqrt{2}}{1-2}=\frac{3-3\sqrt{2}}{-1}=3\sqrt{2}-3$$

Ejemplo 5.4.

Racionaliza la expresión $\dfrac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Solución

Se multiplica por el conjugado del denominador y se simplifica para obtener el resultado.

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{5-3}==\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 5.5.

Racionaliza $\dfrac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Solución

Se multiplica al numerador y denominador por $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$, *y se efectúa la simplificación.*

$$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{6(\sqrt{3})^2+3\sqrt{6}-4\sqrt{6}-2(\sqrt{2})^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\frac{18-\sqrt{6}-4}{12-2}=\frac{14-\sqrt{6}}{10}$$

Ejercicios propuestos

1. Racionaliza los siguientes denominadores:

2. $\frac{2}{\sqrt{5}}$
3. $\frac{3}{\sqrt{3}}$
4. $\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$
5. $\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$
6. $\frac{12}{\sqrt{6}}$
7. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
8. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{20}}$
9. $\frac{6}{\sqrt[3]{4}}$
10. $\frac{10}{\sqrt{20}}$
11. $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{30}}{\sqrt{5}}$
12. $\frac{\sqrt{45}-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$
13. $\frac{8}{3+\sqrt{7}}$
14. $\frac{4}{\sqrt{6}+2}$
15. $\frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
16. $\frac{3+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$
17. $\frac{2}{3+\sqrt{2}}$
18. $\frac{1}{1-\sqrt{7}}$
19. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$
20. $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
21. $\frac{2}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$