ENCUENTRO # 3
TEMA: Números Primos, Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor.

CONTENIDOS:

1. Números primos. Propiedades.
2. Mínimo Común Múltiplo.
3. Máximo Común Divisor.

DESARROLLO

Ejercicios Reto

1. Dado el número N = $2495\square$, qué dígito debe colocarse en la casilla para que N sea divisible por 9.
A)3 B)4 C)5 D)6 E)7
2. Dado el número N = $2\square 94$, qué dígito debe colocarse en la casilla para que N sea divisible por 11.
A)1 B)3 C)5 D)7 E)9

Números primos. Propiedades.

Definición 1.
*Un **número primo** es el número que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad.*

Ejemplo 1.1.
5, 7, 11, 23, 29, 37, 97

Definición 2.
*Un **número compuesto** es aquel que además de ser divisible por sí mismo y por la unidad lo es por otro factor.*

Clasificación de los números naturales

1. El número 1 (No se considera ni primo, ni compuesto).
2. Los números primos (Los que tienen dos divisores positivos)
3. Los números compuestos (Los que tienen más de dos divisores)

Criba de Eratóstenes

~~1~~	(2)	(3)	~~4~~	(5)	~~6~~	(7)	~~8~~	~~9~~	~~10~~
(11)	~~12~~	(13)	~~14~~	~~15~~	~~16~~	(17)	~~18~~	(19)	~~20~~
~~21~~	~~22~~	(23)	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	(29)	~~30~~
(31)	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	(37)	~~38~~	~~39~~	~~40~~
(41)	~~42~~	(43)	~~44~~	~~45~~	~~46~~	(47)	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	(53)	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	(59)	~~60~~
(61)	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	(67)	~~68~~	~~69~~	~~70~~
(71)	~~72~~	(73)	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	(79)	~~80~~
~~81~~	~~82~~	(83)	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	(89)	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	(97)	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Números primos relativos:

Son aquellos que, dentro de un conjunto en particular, sólo admiten como divisor común a la unidad. Es decir que son primos entre sí.

Ejemplo 1.2.

$\underbrace{17 \ \ y \ \ 18}_{\textit{Divisor común: 1}}$ $\qquad$ $\underbrace{8, \ \ 9, \ \ 15}_{\textit{Divisor común: 1}}$

Números primos absolutos:

Son aquellos que dentro de cualquier conjunto de números, todos ellos son números primos.

Ejemplo 1.3.

$\underbrace{17, 23, 41, 47}_{\textit{Divisor Común 1 y todos son primos}}$

Números Primos entre sí 2 a 2:

Es todo conjunto de primos relativos o absolutos, donde se cumple que al tomar dos elementos, estos sólo admiten como divisor común a la unidad.

Ejemplo 1.4.

En el conjunto $\{8, 15, 17\} \Longrightarrow$ *8 y 15; 8 y 17; 15 y 17; son primos entre sí 2 a 2.*

Regla para averiguar si un número es o no primo.

Para saber si un número es primo, basta comprender que no sea divisible por ningún número primo cuyo cuadrado no exceda al número

Ejemplo 1.5.
Averiguar si el número 317 es primo o no.
Procedimiento:

1. *Para ello se extrae la raíz cuadrada por exceso del número dado;* $\sqrt{317} \approx 18$

2. *Se divide el número dado entre todos los números primos menores que su raíz.*

Si alguna de las divisiones resulta ser exacta, el número no es primo; y si todas son inexactas, se puede asegurar que el número dado es primo.
$\frac{317}{17} = 18.6470...$ $\frac{317}{13} = 24.384...$ $\frac{317}{11} = 28.\overline{81}$ $\frac{317}{7} = 54.285...$
$\frac{317}{5} = 63.5$ $\frac{317}{3} = 105.\overline{6}$ $\frac{317}{2} = 158.5$
Por tanto 317 es un número primo

Ejercicios propuestos

1. Comprobar si los números dados son primos o no.

   (a) 139
   (b) 313
   (c) 423
   (d) 541
   (e) 763
   (f) 947
   (g) 901
   (h) 997

Descomposición de un número en factores primos

Teorema 1. ***Descomposición de un número en sus factores primos***
La descomposición de un número en sus factores primos es su expresión como el producto de sus factores primos. Para obtenerlo, se divide el número entre el menor divisor primo posible, el cociente que se obtiene se vuelve a dividir entre el menor divisor primo posible, y así hasta que el último cociente sea 1, este procedimiento también se conoce como factorización completa de un número.

Ejemplo 2.1.

Expresa 144 como el producto de sus factores primos.

Solución

Se divide 144 entre 2 el cociente es 72 y se vuelve a dividir entre 2 así sucesivamente.

$$\begin{array}{cr|l} 144 \div 2 = 72 & 144 & 2 \\ 72 \div 2 = 36 & 72 & 2 \\ 36 \div 2 = 18 & 36 & 2 \\ 18 \div 2 = 9 & 18 & 2 \\ 9 \div 3 = 3 & 9 & 3 \\ 3 \div 3 = 1 & 3 & 3 \\ & & 1 \end{array} \qquad 144 = 2^4 \cdot 3^2$$

Ejemplo 2.2.

Expresa 105 como el producto de sus factores primos.

solución

105 se divide entre 3 y se continúa con el procedimiento.

$$\begin{array}{cr|l} 105 \div 3 = 35 & 105 & 3 \\ 5 \div 5 = 7 & 35 & 5 \\ 7 \div 7 = 1 & 7 & 7 \\ & & 1 \end{array} \qquad 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Ejercicios propuestos

1. Realiza la descomposición en sus factores primos de los siguientes números:

(a) 72	(d) 576	(g) 840	(j) 2376	(m) 3024
(b) 96	(e) 945	(h) 2310	(k) 7020	(n) 16200
(c) 255	(f) 210	(i) 3675	(l) 29400	(o) 30030

Máximo común divisor (MCD)

Es el mayor de los divisores en común de 2 o más números.

Ejemplo 3.1.

Los divisores de 18 y 24 son:

Divisores de 18	1	2	3	6	9	18		
Divisores de 24	1	2	3	4	6	8	12	24

Los divisores comunes son: 1, 2, 3 y 6, el mayor de los divisores en común es el 6

Por tanto, el máximo común divisor de 18 y 24 es 6

Para calcular el MCD de varios números se descomponen simultáneamente en sus factores primos, hasta que ya no tengan un divisor primo en común.

Ejemplo 3.2.
Determina el $MCD(72, 180)$.
Solución
Se realiza la descomposición de 72 y 180, en su factores primos.

72	180	2
36	90	2
18	45	3
6	15	3
2	5	

Por tanto el $MCD(72, 180) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

Ejemplo 3.3.
Calcula el $MCD(11, 23)$
Solución
Los números sólo tiene a la unidad como común divisor, lo cual quiere decir que 11 y 23 son primos relativos.
Por consiguiente el $MCD(11, 23) = 1$

Ejemplo 3.4.
Encuentra el MCD de 48, 36 y 60.
Solución
Se descomponen simultáneamente en factores primos.

48	36	60	2
24	18	30	2
12	9	15	3
4	3	5	

4, 3 y 5 no tienen divisores primos en común divisores de 48, 36 y 60 es 12.

Ejemplo 3.5.
Encuentra el máximo común divisor de 234, 390 y 546.
Solución
Se descomponen simultáneamente en factores primos.

234	390	546	2
117	195	273	3
39	65	91	13
3	5	7	

$MCD(234, 390, 546) = 2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$

Ejercicios propuestos

1. Calcula el MCD de los siguientes números:

(a) 108 y 72
(b) 270 y 900
(c) 243 y 124
(d) 60, 72 y 150
(e) 27, 25 y 28
(f) 80, 675 y 900
(g) 216, 300 y 720
(h) 126, 210 y 392

Mínimo común múltiplo (MCM)

El mínimo común múltiplo es el menor de todos los múltiplos comunes de 2 o más números.

Ejemplo 4.1.
Al obtener los múltiplos de 4 y 6 se tiene:

Múltiplos de 4:	4	8	12	16	20	24	28	32	36	$\cdots$
Múltiplos de 6:	6	12	18	24	30	36	42	48	54	$\cdots$

Los múltiplos comunes son: 12, 24, 36, 48, ...
El menor de todos los múltiplos en común es 12
Por tanto, el mínimo común múltiplo de 4 y 6 es 12

Para calcular el MCM de varios números se descomponen simultáneamente en factores primos hasta que los cocientes sean 1, si alguno de los números no es divisible entre el factor dado, se baja y se continúa hasta encontrar el factor primo que lo divida.

Ejemplo 4.2.
Determina el $MCM[28;42]$
Solución
Se descomponen ambos números en factores primos:

$$\begin{array}{cc|c} 28 & 42 & 2 \\ \hline 14 & 21 & 2 \\ 7 & 21 & 3 \\ 7 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

Por consiguiente el $MCM[28,42] = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

Ejemplo 4.3.
Determina el MCM[25,30,150]
Solución

Se descomponen los números en factores primos:

25	30	150	2
25	15	75	3
25	5	25	5
5	1	5	5
1	1	1	

Por tanto $MCM[25, 30, 150] = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$

Ejemplo 4.4.
Calcula el MCM *de 36,48 y 60.*
Solución
Se descomponen simultáneamente en factores primos y los números primos que resultan se multiplican.

36	48	60	2
18	24	30	2
9	12	15	2
9	6	15	2
9	3	15	3
3	1	5	3
1	1	5	5
1	1	1	1

Entonces el $MCM(36, 48, 60) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

Ejercicios propuestos

1. Calcula el MCM de los siguientes números:

   (a) 108 y 72
   (b) 18 y 45
   (c) 27 y 16
   (d) 36,20 y 90
   (e) 45,54 y 60
   (f) 28,35 y 63
   (g) 20,30 y 50
   (h) 720,600 y 540
   (i) 220,275 y 1925
   (j) 605,1925 y 2695

Resolución de problemas

Problemas donde se aplica el MCD

Ejemplo 5.1.
En una reunión de la academia de Matemática se repartieron 18 bocadillos, 24 vasos con refresco y 12 rebanadas de pastel. ¿Cuántos profesores asistieron a la reunión y que cantidad de bocadillos, vasos con refresco y rebanadas de pastel recibió cada uno?
Nota: *se debe tener en cuenta que la repartición debe ser equitativa.*
Solución
La clave para resolver este ejercicio es aplicar la definición de MCD porque a cada docente le corresponde la misma cantidad de bocadillos, vasos con refresco y rebanadas de pastel.
Se calcula el MCD de 18,24 y 12.

$$\begin{array}{ccc|c} 18 & 24 & 12 & 2 \\ \hline 9 & 12 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & \end{array} \qquad MCD(18,24,12) = 2 \cdot 3 = 6$$

Por consiguiente a la reunión de la academia asistieron 6 profesores y a cada uno le tocó 3 bocadillos, 4 vasos con refresco y 2 rebanadas de pastel.

Ejemplo 5.2.
Tres escuelas deciden hacer una colecta de dinero entre sus alumnos para donar a varias instituciones de beneficencia. Si la primera junta C$120 mil, la segunda C$ 280 mil y la tercera C$ 360 mil. ¿Cuál es la mayor cantidad que recibirá cada institución de tal manera que sea la misma y cuántas instituciones podrán ser beneficiadas?
Solución
Como a cada institución se le asignará la misma cantidad de dinero entonces se deben calcular el MCD entre las cantidades.
Se calcula el MCD de 120,280 y 360.

$$\begin{array}{ccc|c} 120 & 280 & 360 & 2 \\ \hline 60 & 140 & 180 & 2 \\ 30 & 70 & 90 & 2 \\ 15 & 35 & 45 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \end{array} \qquad MCD(120,280,360) = 2^3 \cdot 5 = 40$$

Cada institución recibirá C$ 40 mil y el número de instituciones beneficiadas será la suma de los cocientes 3+7+9=19.

Problemas donde se aplica el MCM

Ejemplo 5.3. *Una persona viaja a Managua cada 12 días, otra lo hace cada 20 días y una tercera cada 6 días. Si hoy han coincidido en estar en la ciudad. ¿Dentro de cuántos días como mínimo, volverán a coincidir?*

Solución

Se calcula el MCM de 12, 20 y 6.

12	20	6	2
6	10	3	2
3	5	3	3
1	5	1	5
1	1	1	

$$MCM(12, 20, 6) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Por tanto el mínimo de días que transcurrirán para que las 3 personas coincidan en la ciudad de Managua es de 60 días.

Ejemplo 5.4. *Un médico receta a un paciente tomar una pastilla cada 6 horas y un jarabe cada 8 horas. Si al iniciar el tratamiento toma la pastilla y el jarabe a la misma hora. ¿Después de cuántas horas volverá a tomar ambos medicamentos al mismo tiempo?*

Solución

Se calcula el MCM 6 y 8.

6	8	2
3	4	2
3	2	2
3	1	3
1	1	

$$MCM(6, 8) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

Por tanto transcurrirán 24 horas para que el paciente tome los medicamentos juntos.

Ejercicios Propuestos

1. Tres cajas contienen cada una 12 kg de carne de res, 18 de carne de cerdo y 24 de carne de pollo. La carne de cada caja este contenida en bolsas del mismo tamaño y con la máxima cantidad posible. ¿Cuánto pesa cada bolsa y cuántas hay por caja?

2. Gerardo fábrica un anuncio luminoso con focos de color rojo, amarillo y verde, de tal manera que los focos rojos enciendan cada 10 segundos, los amarillos cada 6 y las verdes cada 15, si al probar el anuncio enciende todos los focos a la vez. ¿Después de cuántos segundos volverán a encender juntos?

3. Un ebanista quiere cortar en cuadros lo más grande posible una plancha de 300 cm de largo y 80 cm de ancho. ¿Cuál debe ser la longitud de los lados de cada cuadro?

4. Un ciclista da una vuelta a una pista en 6 minutos mientras que otro tarda 4 minutos. Si ambos inician sus recorridos juntos. ¿Después de qué tiempo volverán a encontrarse y cuántas vueltas habrá dado cada uno?

5. Una llave vierte 4 litros de agua por minuto, otra 3 y una tercera 8. ¿Cuál es la menor cantidad de litros que puede tener un pozo para que se llene en un número exacto de minutos por cualquiera de las 3 llaves?

6. Tres rollos de tela de 30, 48 y 72 metros de largo se quieren cortar para hacer banderas con pedazos iguales y de mayor longitud, ¿Cuál será el largo de cada pedazo?

7. Un parque de diversiones quiere construir balsas con 3 troncos de palmeras los cuales miden 15, 9 y 6 metros. ¿Cuánto deben medir los pedazos de tronco si tienen que ser del mismo tamaño? ¿Cuántos pedazos de troncos saldrán?

8. El abuelo de Eduardo da dinero a 3 de sus hijos para que lo repartan a los nietos de manera equitativa. A su hijo Rubén le da \$5000, a su hijo Anselmo le da \$6000, mientras que a Horacio sólo \$3000, ¿Cuál es la mayor cantidad de dinero que podrán darle a sus hijos y cuánto nietos tiene el abuelo?

9. Fabián tiene un reloj que da una señal cada 18 minutos, otro que da una señal cada 12 minutos y un tercero cada 42 minutos. A las 11 de la mañana los tres relojes han coincidido en dar la señal. ¿Cuántos minutos como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir? ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?

10. Daniel tiene 60 canicas azules, 45 verdes y 90 amarillas y quiere hacer círculos iguales con el números mayor de canicas sin que sobre. ¿ Cuántos circulos pueden hacer y cuántas canicas tendrá cada uno?

11. Ricardo tiene en su papelería los lapiceros en bolsas. En la caja "A" tiene bolsitas de 30 lapiceros cada una y no sobran, en la caja "B" tiene bolsitas de 25 lapiceros cada una y tampoco sobran. El número de lapiceros que hay en la caja "A" es igual al que hay en la caja “B". ¿Cuántos lapiceros hay como mínimo en cada caja?

12. Rosa tiene cubos de color lila de 8 cm de arista y de color rojo de 6 cm de arista. Ella quiere apilar los cubos en 2 columnas, una de cubos de color lila y otra de color rojo, desea conseguir que ambas columnas tenga la misma altura. ¿Cuántos cubos como mínimo tiene que apilar de cada color?

13. Tres amigos pasean en bicicleta por un camino que rodea a un lago, para dar una vuelta completa, uno de ellos tarda 10 minutos, otro tarda 15 y el tercero 18 minutos. Parten juntos y acuerdan interrumpir el paseo la primera vez que los 3 pasen simultáneamente por el punto de partida. ¿Cuánto tiempo dura el paseo? ¿Cuántas vueltas dió cada uno?

14. En 1994 se realizaron elecciones para presidente y para jefa de gobierno, el período presidencial es de 6 años y el de jefe de gobierno de 4. ¿En qué años volverán a coincidir las elecciones?

15. El piso de una habitación tiene 425 cm de largo por 275 cm de ancho, si se desea poner el menor números de mosaicos cuadrados de mármol. ¿Cuáles serán las dimensiones máximas de cada mosaico? ¿Cuántos mosaicos se necesitan?