Clase #53

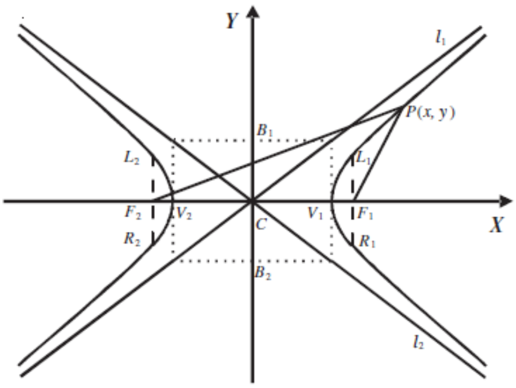
Tema: Hipérbola

Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es siempre constante.

$$\left| \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right| = 2a$$

Gráfica



Elementos

C: Centro

V_1 y V_2: Vértices

F_1 y F_2: Focos

B_1 y B_2: Extremos del eje conjugado

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje transverso o real)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje conjugado o imaginario)

Condición: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$ $(e > 1)$

$\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$ (lado recto)

l_1 y l_2: Asíntotas

Ejermplos

Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, cuya diferencia de sus distancias a los puntos fijos (5, 0) y (– 5, 0), es siempre igual a 8 unidades.

Solución

Se obtienen las distancias del punto $P(x, y)$ a los puntos fijos (focos),

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} \text{ y } \overline{PF_2} = \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

Y se aplica la definición de hipérbola,

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 8$$

Se despeja un radical y se elevan ambos miembros de la igualdad al cuadrado,

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 8 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2} \rightarrow \left(\sqrt{(x-5)^2 + y^2}\right)^2 = \left(8 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}\right)^2$$

Al desarrollar se determina que:

$$(x-5)^2 + y^2 = 64 + 16\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + (x+5)^2 + y^2 \rightarrow -4\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5x + 16$$

Ahora al elevar ambos miembros al cuadrado resulta que,

$$\left(-4\sqrt{(x+5)^2 + y^2}\right)^2 = (5x+16)^2 \rightarrow 16(x^2 + y^2 + 10x + 25) = 25x^2 + 160x + 256$$

Finalmente, se simplifica y se obtiene la ecuación: $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

- Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos fijos (–2, 2) y (4, 2), es igual a 4.

Solución

Se aplica la definición y se obtiene:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=4$$

Se despeja una raíz y se elevan al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}\right)^2=\left(4+\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\right)^2$$

$$(x+2)^2+(y-2)^2=16+8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}+(x-4)^2+(y-2)^2$$

$$x^2+4x+4=16+8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}+x^2-8x+16$$

$$12x-28=8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$$

$$3x-7=2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$$

$$(3x-7)^2=\left(2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\right)^2$$

$$9x^2-42x+49=4x^2-32x+64+4y^2-16y+16$$

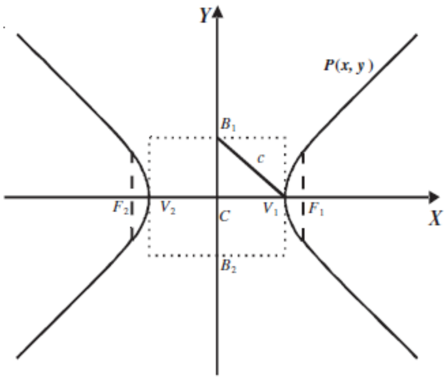
$$5x^2-4y^2-10x+16y-31=0$$

Ejercicios propuestos

Resuelve lo siguiente:

1. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (–3, 0) y (3, 0), es siempre igual a 4
2. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (–5, 0) y (5, 0), es siempre igual a 6
3. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (0, –7) y (0, 7), es siempre igual a 12
4. Obtén la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (0, 4) y (0, –4), es siempre igual a 5
5. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos $\left(\sqrt{7},0\right)$ y $\left(-\sqrt{7},0\right)$, es siempre igual a 4
6. Encuentra el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (9, 4) y (1, 4), es siempre igual a 6
7. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (–3, 7) y (–3, –3), es siempre igual a 8

Ecuación de una hipérbola con centro en el origen



En la figura:

$\overline{CV_1} = \overline{CV_2} = a$

$\overline{CB_1} = \overline{CB_2} = b$

$\overline{CF_1} = \overline{CF_2} = c$

$\overline{CV_1} = \overline{CV_2} = a$, entonces, $\overline{V_1V_2} = 2a$ al ser V_1 un punto de la hipérbola se tiene que: $\overline{V_1F_2} - \overline{V_1F_1} = 2a$, por tanto, la diferencia de las distancias de cualquier punto de la hipérbola a los dos puntos fijos (focos) es igual a $2a$.

La distancia de $B_1(0, b)$ a $V_1(a, 0)$ es: $\overline{B_1V_1} = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = c$, de donde $b^2 = c^2 - a^2$, sea $P(x, y)$ un punto de la hipérbola, al hallar la distancia de P a los puntos fijos $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ y al aplicar la definición $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$, se obtiene:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Se despeja una radical: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Se despeja el radical y se divide entre $4a$:

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \rightarrow \frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Se eleva al cuadrado y se simplifica:

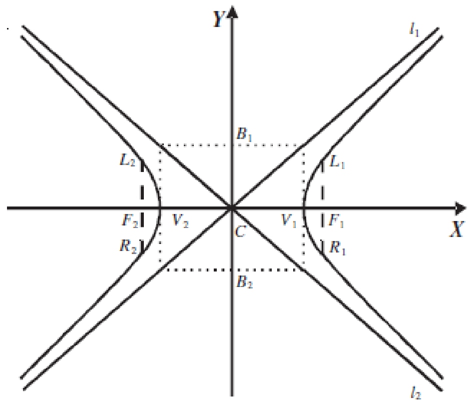
$$\left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \rightarrow \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$\frac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - y^2 + a^2 - c^2 = 0 \rightarrow \frac{c^2 - a^2}{a^2}x^2 - y^2 = c^2 - a^2$, se divide entre $c^2 - a^2$:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$, pero $b^2 = c^2 - a^2$, se sustituye y se obtiene: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, la cual es la ecuación de una hipérbola horizontal con centro en el origen.

De forma análoga para una hipérbola vertical, resulta la ecuación: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Hipérbola horizontal



Ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Elementos

Vértices: $V(\pm a, 0)$

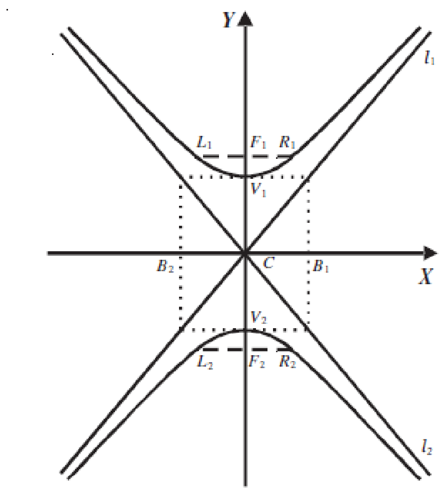
Focos: $F(\pm c, 0)$

Extremos del eje conjugado: $B(0, \pm b)$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$l_1: y = \frac{b}{a}x \qquad l_2: y = -\frac{b}{a}x$$

Hipérbola vertical



Ecuación canónica

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Elementos

Vértices: $V(0, \pm a)$

Focos: $F(0, \pm c)$

Extremos del eje conjugado: $B(\pm b, 0)$

Ecuaciones de las asíntotas

$$l_1: y = \frac{a}{b}x \qquad l_2: y = -\frac{a}{b}x$$

Para hipérbolas horizontales y verticales se tiene que:

Condición: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$, excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$ $(e > 1)$, lado recto: $\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$

Eje transverso: $2a$, eje conjugado: $2b$, eje focal: $2c$.

Ejemplos

Determina los elementos y traza la gráfica de la hipérbola, cuya ecuación es:

$$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

Solución

Se transforma la ecuación a la forma canónica:

$$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

Se divide entre el término independiente y se simplifica:

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

$$\frac{9x^2}{36}-\frac{4y^2}{36}=\frac{36}{36} \rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1 \text{ Ecuación en su forma canónica.}$$

La ecuación representa una hipérbola horizontal de la forma: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

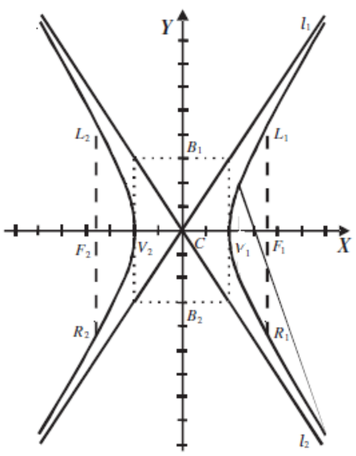
De la cual se obtiene el semieje transverso a y el semieje conjugado b:

$$a^2 = 4 \rightarrow a = 2 \text{ y } b^2 = 9 \rightarrow b = 3$$

Se aplica la condición para encontrar el valor de c (distancia del centro al foco):

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

Al sustituir: $a = 2$, $b = 3$ y $c = \sqrt{13}$, se obtiene:



Vértices: $V(\pm a, 0) = V(\pm 2, 0)$

Focos: $F(\pm c, 0) = F\left(\pm\sqrt{13},0\right)$

Extremos del eje conjugado:

$$B(0, \pm b) = B(0, \pm 3)$$

Asíntotas:

$$l_1\text{: } y=\frac{3}{2}x \rightarrow 3x-2y=0$$

$$l_2\text{: } y=-\frac{3}{2}x \rightarrow 3x+2y=0$$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)^2}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 2(2) = 4$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{13}$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2(3) = 6$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Determina los elementos de la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$.

Solución

Se transforma la ecuación $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$ a su forma canónica:

$$x^2 - 4y^2 = -4$$

$$\frac{x^2}{-4}-\frac{4y^2}{-4}=\frac{-4}{-4} \qquad \text{Se divide entre el término independiente.}$$

$$\frac{x^2}{-4}+\frac{y^2}{1}=1 \qquad \text{Se simplifican las fracciones.}$$

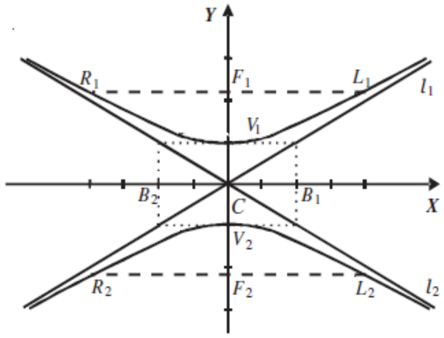
$$\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{4}=1 \qquad \text{Ecuación en su forma canónica.}$$

Es una hipérbola vertical de la forma: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$.

De la cual $a^2 = 1$ y $b^2 = 4$, por tanto, $a = 1$ y $b = 2$.

El valor de c es: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$.

Con los valores de $a = 1$, $b = 2$ y $c = \sqrt{5}$, se determinan los elementos y la gráfica.



Vértices: $V(0, \pm a) = V(0, \pm 1)$

Focos: $F(0, \pm c) = F(0, \pm\sqrt{5})$

Extremos del eje conjugado:

$$B(\pm b, 0) = B(\pm 2, 0)$$

Asíntotas

$$l_1: y = \frac{1}{2}x \rightarrow x - 2y = 0$$

$$l_2: y = -\frac{1}{2}x \rightarrow x + 2y = 0$$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{1} = 8$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 2(1) = 2$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{5}$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2(2) = 4$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

Ejercicios propuestos

Determina los elementos de las siguientes hipérbolas:

1. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$
2. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
3. $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{5} = 1$
4. $\frac{y^2}{4a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
5. $4x^2 - 5y^2 - 20 = 0$
6. $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$
7. $4y^2 - x^2 - 4 = 0$
8. $5y^2 - 16x^2 + 400 = 0$
9. $4x^2 - 9y^2 + 144 = 0$
10. $x^2 - y^2 + 4 = 0$
11. $5x^2 - 6y^2 + 30 = 0$
12. $12x^2 - 5y^2 - 60 = 0$

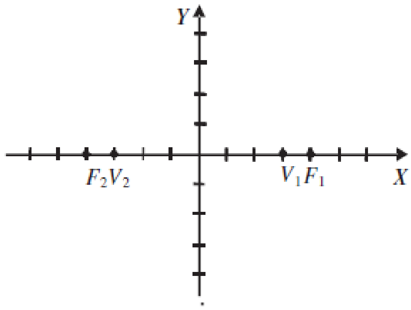
Dados sus elementos, obtener la ecuación

Ejemplos

- ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola cuyos vértices y focos son los puntos (± 3, 0) y (± 4, 0), respectivamente?

Solución

Se localizan los puntos en el plano cartesiano:



Y el resultado es una hipérbola horizontal con centro en el origen, semieje transverso $a = 3$ y semieje focal $c = 4$.

El valor de b es: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

Los valores de $a = 3$ y $b = \sqrt{7}$ se sustituyen en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Y se obtiene la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1 \quad \text{o} \quad 7x^2 - 9y^2 - 63 = 0$$

- Determina la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, uno de sus focos, el punto $\left(2\sqrt{3},\ 0\right)$ y el lado recto $2\sqrt{2}$.

Solución

De los elementos que se tienen resulta que:

$$c = 2\sqrt{3} \quad \text{y} \quad \frac{2b^2}{a} = 2\sqrt{2}$$

Se despeja b^2 de la fórmula del lado recto en términos de a:

$$b^2 = \sqrt{2}a$$

Se sustituyen en la condición los valores de c y b^2, se simplifica y resuelve la ecuación.

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \left(2\sqrt{3}\right)^2 = a^2 + \sqrt{2}a$$

$$12 = a^2 + \sqrt{2}a$$

$$a^2 + \sqrt{2}\,a - 12 = 0$$

$$(a + 3\sqrt{2})(a - 2\sqrt{2}) = 0$$

$$a = -3\sqrt{2} \text{ y } a = 2\sqrt{2}$$

$a = 2\sqrt{2}$, por tanto,

$$b^2 = \sqrt{2}\left(2\sqrt{2}\right) = 4 \rightarrow b = 2$$

Se sustituye en la fórmula $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y se obtiene:

$$\frac{x^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} - \frac{y^2}{(2)^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow x^2 - 2y^2 - 8 = 0$$

Ejercicios Propuestos

Determina la ecuación de la hipérbola que cumpla con las siguientes características:

1. $V(0, \pm 3)$ y $F(0, \pm 4)$
2. $V(\pm 4, 0)$ y $F(\pm 5, 0)$
3. $V(0, \pm \sqrt{6})$ y $F(0, \pm \sqrt{10})$
4. $V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ y $F(\pm 2\sqrt{3}, 0)$
5. $V(\pm 1, 0)$ y $F(\pm \sqrt{5}, 0)$
6. $V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ y $F(\pm 2\sqrt{7}, 0)$
7. $V_1(3, 0)$, $V_2(-3, 0)$ y lado recto $= \frac{8}{3}$
8. $F_1\left(0, \sqrt{41}\right)$, $F_2\left(0, -\sqrt{41}\right)$ y lado recto $= \frac{25}{2}$
9. $V_1(6, 0)$, $V_2(-6, 0)$, excentricidad $= \frac{\sqrt{5}}{2}$
10. Centro en el origen, vértice y foco en los puntos $(2\sqrt{3}, 0)$ y $(4, 0)$ respectivamente y eje conjugado sobre el eje de las ordenadas.
11. Centro en el origen, eje focal sobre el eje de las ordenadas y la longitud de su eje conjugado y lado recto $\sqrt{20}$ y $\frac{5}{3}\sqrt{6}$, respectivamente.
12. Centro en el origen, eje transverso igual a 4 y sobre el eje de las abscisas, y una de sus asíntotas es la ecuación $\sqrt{3}x - 2y = 0$
13. Centro en el origen, eje conjugado sobre el eje de las ordenadas, lado recto $2\sqrt{3}$ y excentricidad $\frac{\sqrt{6}}{2}$
14. Centro en el origen, eje transverso sobre el eje de las ordenadas, lado recto $\frac{5}{3}\sqrt{6}$ y excentricidad $\frac{\sqrt{66}}{6}$
15. Asíntotas las rectas $4x + 3y = 0$ y $4x - 3y = 0$, eje imaginario igual a 8 unidades (dos soluciones).
16. Extremos del eje conjugado $B_1(0, 1)$, $B_2(0, -1)$ y excentricidad $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$
17. Eje focal sobre X, eje conjugado $\sqrt{20}$ y la longitud de cada lado recto $\frac{5\sqrt{6}}{3}$
18. Pasa por los puntos $\left(\frac{10}{3}, 4\right)$ y $\left(\frac{2}{3}\sqrt{13}, -2\right)$, eje transverso sobre el eje X.
19. Pasa por los puntos $\left(6, 2\sqrt{3}\right)$ y $\left(9, 4\sqrt{2}\right)$, eje conjugado sobre el eje Y.

Resumen de las cónicas

Identificación de una cónica

Una forma de conocer la naturaleza de la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

es realizar una rotación y traslación de ejes, pero esta transformación es muy laboriosa.

Otra forma de identificar su naturaleza, sin tener que realizar la transformación es sustituir los coeficientes de la ecuación general en la expresión:

$$I = B^2 - 4AC$$

Que recibe el nombre de *invariante o indicador*.

Caso I: si se elige un ángulo α de modo que $B = 0$, entonces:

- Si A o $C = 0$ la ecuación representa una parábola.
- Si $A \neq C$ y de signos iguales la ecuación representa una elipse.
- Si A y C tienen signos contrarios la ecuación representa una hipérbola.

Caso II: si $B \neq 0$ la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, representa una cónica no degenerada si:

- $B^2 - 4AC = 0$ la ecuación representa una parábola.
- $B^2 - 4AC < 0$ la ecuación representa una elipse.
- $B^2 - 4AC > 0$ la ecuación representa una hipérbola.

Una curva degenerada es aquella que representa:

- Dos rectas concurrentes.
- Un punto.
- Dos rectas paralelas.
- Una sola recta.