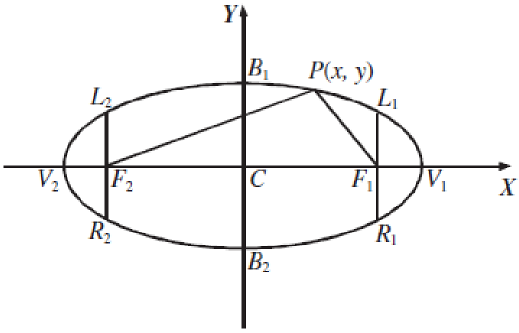
Clase # 52

Tema Elipse

Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$



C: Centro

V_1 y V_2: Vértices

F_1 y F_2: Focos

B_1 y B_2: Extremos del eje menor

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje mayor)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje menor)

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$

Donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$ (lado recto)

$e = \dfrac{c}{a} < 1$ excentricidad

Ejemplos

Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuyas sumas de distancias a los puntos fijos $F_1(0, 3)$ y $F_2(0, -3)$, son siempre iguales a 10 unidades.

Solución

Sea $P(x, y)$ un punto que cumple con la condición dada, mediante la fórmula: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ se encuentra la distancia a los puntos $F_1(0, 3)$ y $F_2(0, -3)$

Se despeja un radical y se elevan ambos miembros de la igualdad al cuadrado:

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 10 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right)^2$$

$$x^2 + (y-3)^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + (y+3)^2$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + y^2 + 6y + 9$$

$$20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 100 + 12y$$

$$5\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 25 + 3y$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros y se obtiene:

$$\left(5\sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right)^2 = (25 + 3y)^2$$

$$25(x^2 + y^2 + 6y + 9) = 625 + 150y + 9y^2$$

$$25x^2 + 25y^2 + 150y + 225 = 625 + 150y + 9y^2$$

$$25x^2 + 16y^2 = 400$$

Por tanto la ecuación de la curva es: $25x^2 + 16y^2 = 400$, la cual por la definición corresponde a una elipse.

Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (3, 4) y (9, 4) es siempre igual a 8 unidades.

Solución

Al aplicar la definición de elipse se obtiene:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}=8$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=8-\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2=64-16\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}+(x-9)^2+(y-4)^2$$

Se desarrollan y se simplifica para determinar la ecuación.

$$(3x-34)^2=\left(-4\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}\right)^2$$

$$9x^2-204x+1156=16\left(x^2-18x+81\right)+16\left(y^2-8y+16\right)$$

$$9x^2-204x+1156=16x^2+16y^2-288x-128y+1552$$

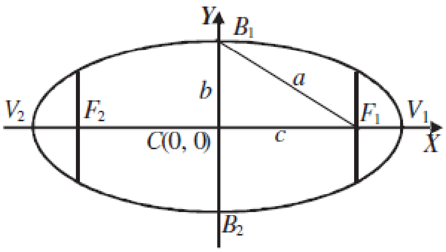
$$7x^2+16y^2-84x-128y+396=0$$

Ejercicios propuestos

Determina la ecuación del lugar geométrico (elipse), según los datos proporcionados:

1. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (4, 0) y (–4, 0) es igual a 12.
2. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (2, 0) y (– 2, 0) es igual a 6.
3. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (0, 5) y (0, – 5) es igual a 14.
4. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (– 2, 1) y (– 2, 7) es siempre igual a 10.
5. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (9, – 2) y (– 7, – 2) siempre es igual a 20.

Ecuación de una elipse con centro en el origen



En la figura:

$\overline{CV_1}=\overline{CV_2}=a$

$\overline{CB_1}=\overline{CB_2}=b$

$\overline{CF_1}=\overline{CF_2}=c$

Como $\overline{CV_1}=\overline{CV_2}=a$, entonces $\overline{V_1V_2}=2a$ y al ser V_1 un punto de la elipse $\overline{V_1F_1}+\overline{V_1F_2}=2a$, por tanto, la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los dos puntos fijos (focos) es igual a $2a$; como B_1 es un punto de la elipse, entonces por la definición $\overline{B_1F_1}+\overline{B_1F_2}=2a$, de donde $\overline{B_1F_1}=a$ y por la gráfica $a^2 = b^2 + c^2$.

Sea $P(x, y)$ un punto de la elipse, entonces por la definición $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$, se aplica la fórmula $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ para obtener la distancia de P a los puntos fijos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ se obtiene:

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

Se despeja un radical: $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

Se despeja el radical y se divide entre -4: $-4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Se eleva al cuadrado y se simplifica: $(cx+a^2)^2=\left(a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 \rightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

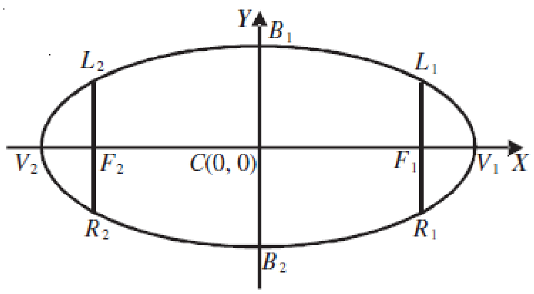
Se divide entre $a^2(a^2-c^2)$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$. Si $a^2=b^2+c^2$, entonces $b^2=a^2-c^2$, se sustituye y se obtiene: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Por tanto, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ es la ecuación de una elipse horizontal con centro en el origen; para una elipse vertical con centro en el origen se sigue un procedimiento análogo y se obtiene: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Elementos y ecuación

Elipse horizontal

El eje mayor coincide con el eje X.



Ecuación canónica: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Elementos:

Vértices: $V(\pm a, 0)$

Focos: $F(\pm c, 0)$

Extremos del eje menor: $B(0, \pm b)$

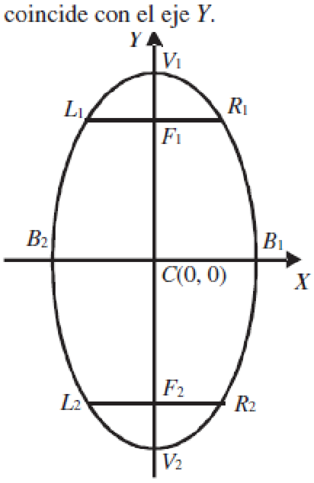
Lado recto: $\overline{LR}=\frac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$ $(e<1)$

Condición: $a^2=b^2+c^2$; $a>b$, $a>c$ donde $b=\sqrt{a^2-c^2}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$

Elipse vertical

El eje mayor coincide con el eje Y.



Ecuación canónica: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Elementos:

Vértices: $V(0, \pm a)$

Focos: $F(0, \pm c)$

Extremos del eje menor: $B(\pm b, 0)$

Lado recto: $\overline{LR}=\frac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$ $(e<1)$

Condición: $a^2=b^2+c^2$; $a>b$, $a>c$ donde $b=\sqrt{a^2-c^2}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$

Ejemplos

Determina los elementos y grafica la elipse, cuya ecuación es: $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$.

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria.

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

Se divide por el término independiente, $\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$

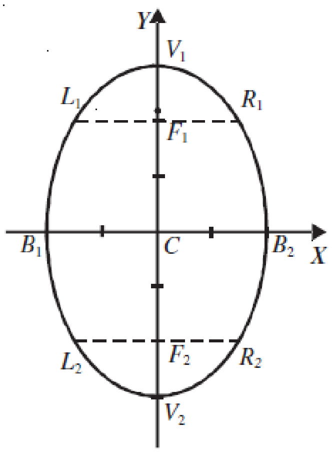
Se simplifica y se obtiene la forma canónica, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, porque $a > b$, de donde $a = 3$ y $b = 2$, entonces tenemos una elipse vertical de ecuación $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Para encontrar c, se sustituye a^2 y b^2 en $c = \sqrt{a^2 - b^2}$,

$$c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

Los elementos se obtienen al sustituir los valores de a, b y c en:



Vértices

$V_1(0, a)$ y $V_2(0, -a)$ $\rightarrow$ $V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$

Focos

$F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$ $\rightarrow$ $F_1(0, \sqrt{5})$ y $F_2(0, -\sqrt{5})$

Extremos del eje menor

$B_1(b, 0)$ y $B_2(-b, 0)$ $\rightarrow$ $B_1(2, 0)$ y $B_2(-2, 0)$

$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{3} = \frac{8}{3}$ Longitud del lado recto

$\overline{V_1V_2} = 2a = 2(3) = 6$ Longitud del eje mayor

$\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{5}$ Longitud del eje focal

$\overline{B_1B_2} = 2b = 2(2) = 4$ Longitud del eje menor

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ Excentricidad

Determina los elementos y grafica la elipse: $16x^2 + 25y^2 = 400$.

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria.

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \rightarrow \frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400}$$

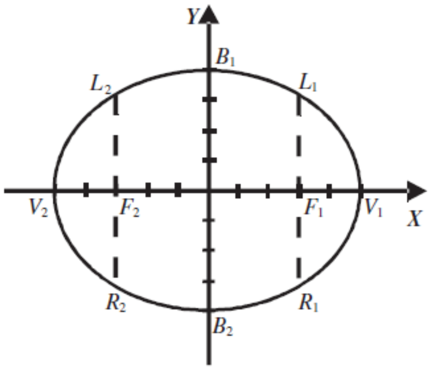
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Como el denominador mayor se encuentra bajo la variable x esta ecuación corresponde a una elipse horizontal de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, obteniendo que $a = 5$ y $b = 4$.

Para hallar c se sustituye a^2 y b^2 en $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$c = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$

La gráfica y los elementos son:



Vértices

$V_1(5, 0)$ y $V_2(-5, 0)$

Focos

$F_1(3, 0)$ y $F_2(-3, 0)$

Extremos del eje menor

$B_1(0, 4)$ y $B_2(0, -4)$

$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{5} = \frac{32}{5}$ Lado recto

$\overline{V_1V_2} = 2a = 2(5) = 10$ Longitud del eje mayor

$\overline{F_1F_2} = 2c = 2(3) = 6$ Longitud del eje focal

$\overline{B_1B_2} = 2b = 2(4) = 8$ Longitud del eje menor

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ Excentricidad

Determina las coordenadas de los focos de la elipse cuya ecuación es: $4x^2 + 9y^2 = 1$.

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria.

$$4x^2 + 9y^2 = 1 \to \frac{4x^2}{1} + \frac{9y^2}{1} = 1 \to \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$$

De la cual $a^2 = \frac{1}{4}$, $b^2 = \frac{1}{9}$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9-4}{36}} = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$

La ecuación tiene la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, es decir, es una elipse horizontal.

Para encontrar los focos se sustituyen los valores:

$$F_1(c,0) = F_1\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right) \quad \to \quad F_2(-c,0) = F_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$$

Por consiguiente, las coordenadas de los focos son: $F_1\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$ y $F_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$.

Ejercicios propuestos

Determina los elementos de las siguientes elipses:

1. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$
2. $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$
3. $12x^2 + 5y^2 - 60 = 0$
4. $x^2 + 16y^2 - 64 = 0$
5. $9x^2 + 25y^2 = 225$
6. $16x^2 + 4y^2 = 64$
7. $9x^2 + 4y^2 = 25$
8. $4x^2 + y^2 = 1$
9. $3x^2 + 2y^2 = 6$
10. $16x^2 + 9y^2 - 1 = 0$
11. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$
12. $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$
13. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$
14. $100x^2 + 25y^2 - 200 = 0$
15. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0$
16. $3x^2 + y^2 - 12 = 0$

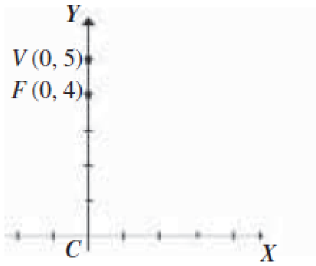
Dados sus elementos obtener la ecuación de la elipse con centro en el origen

Ejemplos

Determina la ecuación de la elipse de centro en el origen, vértice (0, 5) y foco en (0, 4).

Solución

Se grafican los datos.



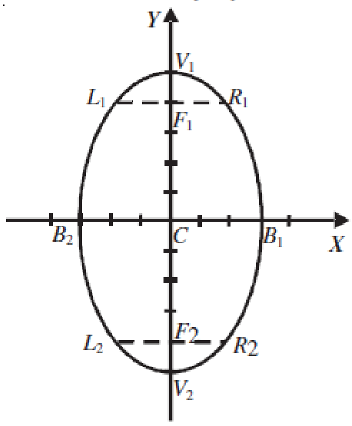
La elipse es vertical y su ecuación es $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, de la gráfica se obtiene la distancia del centro al vértice (a) y la distancia del centro al foco (c), por tanto:

$$a = 5 \text{ y } c = 4$$

Para encontrar b se sustituyen los valores de a y c en $b=\sqrt{a^2-c^2}$:

$$b=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$$

Se sustituyen los valores de a y b y resulta la ecuación:



Forma canónica: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

Al multiplicar por 225 e igualar a cero, se obtiene la ecuación en su forma general:

$$25x^2 + 9y^2 = 225 \rightarrow 25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$$

Determina la ecuación de la elipse con vértices en (– 6, 0) y (6, 0) y la longitud de uno de sus lados rectos igual a $\frac{20}{3}$.

Solución

El eje mayor (2a) es la distancia entre los vértices, utilizando la fórmula:

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, se obtiene:

$$2a = \sqrt{(6+6)^2+(0-0)^2} \rightarrow 2a = 12 \rightarrow a = 6$$

Al sustituir $a = 6$, $\overline{LR} = \frac{20}{3}$ y despejar b^2 de la fórmula del lado recto $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$, se obtiene:

$$\frac{2b^2}{6}=\frac{20}{3} \rightarrow b^2 = 20$$

La elipse es horizontal y la ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \quad \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$$

Se multiplica por 180 y tenemos que la ecuación es:

$$5x^2 + 9y^2 = 180 \qquad 5x^2 + 9y^2 - 180 = 0$$

La excentricidad es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{7}{10}$, de donde $\dfrac{c}{10} = \dfrac{7}{10}$.

Al despejar se obtiene que $c = 7$.
Si $a = 10$ y $c = 7$, se utiliza la condición $b = \sqrt{a^2 - c^2}$,

$$b = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{100 - 49} = \sqrt{51}$$

Así, la longitud del eje menor es $2b = 2\sqrt{51}$.

El eje mayor de una elipse mide 20 unidades, si la excentricidad es $e = \dfrac{7}{10}$, ¿cuál es la longitud del eje menor?

Solución

El eje mayor es la distancia entre los vértices, $\overline{V_1V_2} = 2a = 20$.

$$2a = 20 \text{ por tanto, } a = 10$$

Ejercicios propuestos

Determina la ecuación de la elipse, según los datos proporcionados.

1. $V(\pm 6, 0)$ y $F(\pm 4, 0)$
2. $V(\pm 3, 0)$ y $F(\pm\sqrt{2}, 0)$
3. $V(\pm\sqrt{5}, 0)$ y $F(\pm 2, 0)$
4. $V(0, \pm 7)$ y $F(0, \pm 5)$
5. $V(0, \pm\sqrt{3})$ y $F(0, \pm\sqrt{2})$
6. $V(\pm 5, 0)$ y $B(0, \pm 4)$
7. $V(\pm 4, 0)$ y $B(0, \pm\sqrt{7})$
8. $F(\pm 3, 0)$ y $B(0, \pm 2)$
9. $F(\pm\sqrt{5}, 0)$ y $B(0, \pm 3)$
10. $F(0, \pm\sqrt{2})$ y $B(\pm 2, 0)$
11. $V(0, \pm\sqrt{5})$ y $B(\pm 1, 0)$
12. $F(0, \pm 7)$ y $B(\pm 4, 0)$
13. $F(0, \pm 2)$ y lado recto = $\dfrac{10}{3}$
14. $F(\pm 4, 0)$ y excentricidad $e = \dfrac{4}{5}$
15. $F(0, \pm\ 6)$ y excentricidad $e = \dfrac{3}{4}$
16. $B\left(0,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ y excentricidad igual a $\dfrac{1}{2}$
17. Excentricidad = $\dfrac{1}{3}$, lado recto = $\dfrac{16}{3}$ (dos soluciones).