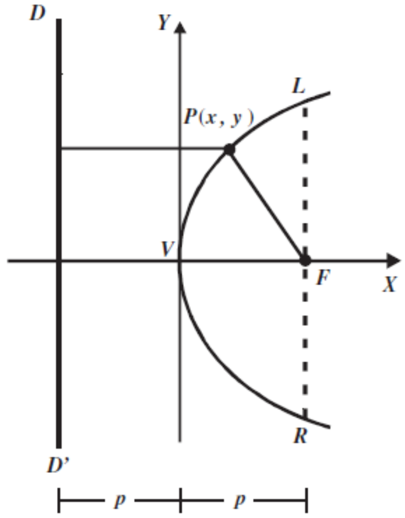
Clase # 51

Tema: Parábola

Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y una recta fija, llamada directriz.



$\overline{PF} = \overline{PD}$

Elementos:

V: Vértice

F: Foco

$\overline{DD'}$: Directriz

LR: Lado recto, $LR = |4p|$

p: parámetro
(distancia del vértice al foco o a la directriz)

Ejemplos

Determina la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan del punto $F(0, 3)$ y de la recta $y + 3 = 0$.

Solución

Con las fórmulas de distancia entre dos puntos $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ y distancia de un punto a una recta $d = \dfrac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, se obtienen las distancias del punto $P(x, y)$ a F y a la recta:

$$\overline{PF} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2},\ \overline{PD} = \frac{y+3}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

Al igualar:

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = y + 3$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 = (y+3)^2$$

Se desarrolla y se simplifica para obtener la ecuación del lugar geométrico, denominada parábola.

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 6y + 9$$
$$x^2 - 12y = 0$$

Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto del plano que se mueve de tal forma que su distancia al punto (2, 1) siempre es igual a su distancia a la recta $x + 2y - 3 = 0$.

Solución

Se obtienen las distancias,

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\ ,\ \overline{PD} = \frac{x+2y-3}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

Al igualar,

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros y reducir términos semejantes, resulta la ecuación que se busca,

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = \frac{x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y}{5}$$

$$5x^2 + 5y^2 - 20x - 10y + 25 = x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 14x + 2y + 16 = 0$$

Ejercicios propuestos

1. Un punto del plano se mueve de tal forma que su distancia al punto (– 2, 0) es igual a su distancia a la recta $x - 2 = 0$. Determina la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto.
2. Un punto se mueve en el plano de tal manera que equidista del punto (0, – 1) y de la recta $y - 1 = 0$. Encuentra la ecuación del lugar geométrico que describe.
3. Un punto $P(x, y)$ se mueve de manera que su distancia al punto (3, – 1) es siempre igual a su distancia a la recta $x + 3 = 0$. Determina la ecuación del lugar geométrico.
4. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta $y + 4 = 0$ y del punto (0, 4).
5. Obtén la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia del punto (2, 4) y de la recta $y - 6 = 0$.
6. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, de los cuales su distancia a la recta $x + 1 = 0$ es igual a su distancia al punto (– 7, 2).
7. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto (0, 3) y de la recta $x + y - 4 = 0$.
8. Un punto del plano se mueve de tal forma que su distancia al punto (2, – 1) es igual a su distancia a la recta $2x + 3y - 1 = 0$. Obtén la ecuación del lugar geométrico que describe el punto.

Ecuación de la parábola con vértice en el origen

Sea una parábola con vértice en el origen, foco $F(p, 0)$ donde p es el parámetro y su directriz $x = -p$. Se toma un punto $P(x, y)$ que cumpla con la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, y la de distancia de un punto a una recta $d = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, se obtienen las distancias del punto P al foco y a la directriz.

La distancia de P al foco es:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

La distancia de P a la recta $x + p = 0$ es:

$$\overline{PF} = \frac{1(x)+0(y)+p}{\sqrt{(1)^2+(0)^2}} = x+p$$

Ahora se igualan las distancias:

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = x+p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se determina que:

$$\left(\sqrt{(x-p)^2+y^2}\right)^2 = (x+p)^2$$

$$(x-p)^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - x^2 - 2px - p^2 = 0$$

$$y^2 - 4px = 0$$

Si el foco está sobre el eje Y, $F(0, p)$ donde p es el parámetro y su directriz la recta $y = -p$ y vértice en el origen, al aplicar la definición el resultado es el siguiente:

$$\sqrt{(y-p)^2+x^2} = y+p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se obtiene:

$$\left(\sqrt{(y-p)^2+x^2}\right)^2 = (y+p)^2$$

$$(y-p)^2 + x^2 = y^2 + 2py + p^2$$

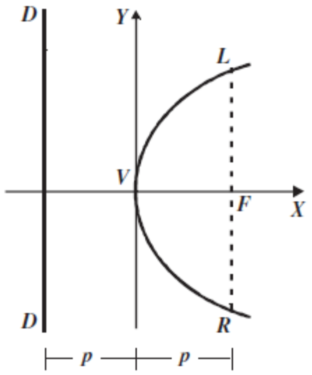
$$y^2 - 2py + p^2 + x^2 - y^2 - 2py - p^2 = 0$$

$$x^2 - 4py = 0$$

Elementos y ecuación de una parábola con vértice en el origen

Parábola horizontal

Su foco está sobre el eje X y son cóncavas hacia la derecha o a la izquierda.



Ecuación canónica:

$$y^2 = 4px$$

Foco: $F(p, 0)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $x = -p$

Ecuación del eje: $y = 0$

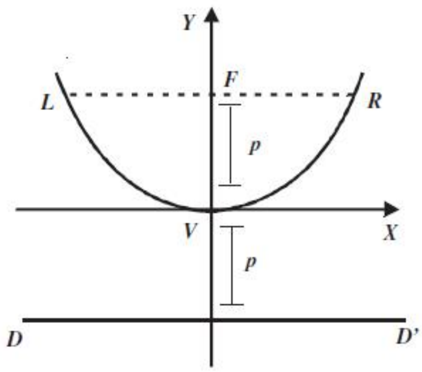
Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$

Cancavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola abre hacia la derecha.
- Si $p < 0$ entonces la parábola abre hacia la izquierda.

Parábola vertical

Su foco está sobre el eje Y, son cóncavas hacia arriba o hacia abajo.



Ecuación canónica:

$$x^2 = 4py$$

Foco: $F(0, p)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $y = -p$

Ecuación del eje: $x = 0$

Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$

Concavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

Ejemplos

Encuentra los elementos y grafica la parábola cuya ecuación es $y^2 - 8x = 0$.

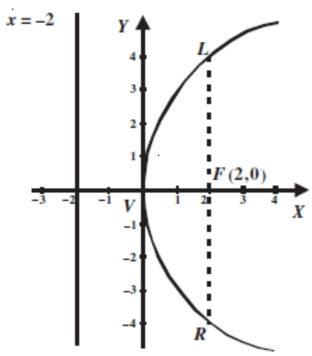
Solución

Se escribe la ecuación en su forma canónica: $y^2 = 4px$

$$y^2 - 8x = 0 \qquad \rightarrow \qquad y^2 = 8x$$

Donde $4p = 8 \quad \rightarrow \quad p = 2$

Es una parábola horizontal y abre hacia la derecha, al sustituir en las fórmulas se obtienen sus elementos y posteriormente su gráfica.



Foco: $F(p, 0) = F(2, 0)$

Directriz: $x = -p \rightarrow x = -2$

Lado recto: $LR = |4(2)| = 8$

Eje: $y = 0$

Encuentra los elementos y grafica la parábola cuya ecuación es: $3x^2 - 12y = 0$.

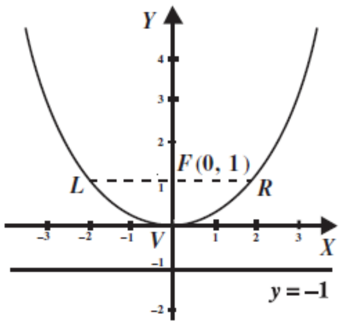
Solución

Se escribe la ecuación en su forma canónica: $x^2 = 4py$

$$3x^2 - 12y = 0 \qquad \rightarrow \qquad 3x^2 = 12y \qquad \rightarrow \qquad x^2 = 4y$$

Donde $4p = 4$, entonces $p = 1$.

Es una parábola vertical y abre hacia arriba, al sustituir en las fórmulas se determinan los elementos y posteriormente la gráfica:



Foco: $F(0, p) = F(0, 1)$

Directriz: $y = -p \rightarrow y = -1$

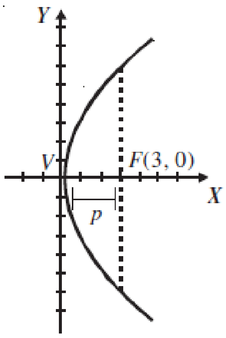
Lado recto: $LR = |4(1)| = 4$

Eje: $x = 0$

Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto (3, 0).

Solución

Se grafican los elementos dados, se deduce que la parábola es cóncava hacia la derecha y el valor del parámetro es $p = 3$, al sustituir en la ecuación $y^2 = 4px$, se obtiene:



$$y^2 = 4px$$
$$y^2 = 4(3)x$$
$$y^2 = 12x$$
$$y^2 - 12x = 0$$

Otra forma de resolver este problema es igualar el foco de la parábola horizontal con la coordenada del foco dado:

$$F(p, 0) = F(3, 0), \text{ por tanto, } p = 3$$

Al sustituir el valor de $p = 3$ en la ecuación $y^2 = 4px$, se determina que:

$$y^2 = 12x$$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es: $y^2 - 12x = 0$.

Ejercicios propuestos

Grafica y determina las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y la ecuación del eje de cada una de las siguientes parábolas:

1. $y^2 = -4x$
2. $x^2 = 12y$
3. $y^2 - 20x = 0$
4. $x^2 = 16y$
5. $3y^2 + 48x = 0$
6. $2x^2 + 16y = 0$
7. $x^2 + 6y = 0$
8. $2y^2 - 16x = 0$
9. $24y = 8x^2$
10. $3x^2 + 8y = 0$
11. $y^2 = 5x$
12. $x = -y^2$
13. $y = x^2$

Encuentra las ecuaciones de las parábolas con los datos dados:

14. Vértice en el origen y foco en el punto $(-5, 0)$
15. Vértice en el origen y foco en el punto $(0, 6)$
16. Vértice en el origen y foco en el punto $(2, 0)$
17. Vértice en el origen y foco en el punto $(0, -1)$
18. Vértice en el origen y foco en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
19. Vértice en el origen y foco en el punto $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$
20. Vértice en el origen y directriz en la recta $y + 2 = 0$
21. Vértice en el origen y directriz en la recta $x - 6 = 0$
22. Vértice en el origen y directriz en la recta $2y - 5 = 0$
23. Vértice en el origen y directriz en la recta $2x - 3 = 0$
24. Foco en el punto $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ y directriz en la recta $3x + 4 = 0$
25. Foco en el punto $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ y directriz en la recta $4y + 1 = 0$
26. Vértice en el origen, su eje coincide con el eje X y pasa por el punto $(-2, 6)$
27. Vértice en el origen, pasa por el punto $(-2, -1)$ y su eje coincide con el eje Y
28. Vértice en el origen, foco sobre el eje X y pasa por el punto $(3, 4)$
29. Vértice en el origen, foco sobre el eje Y y pasa por el punto $\left(-2, -\frac{3}{4}\right)$

Resuelve los siguientes problemas:

30. Calcula la longitud de la cuerda de la parábola $x^2 - 12y = 0$, la cual es un segmento de la recta $3x - 2y - 12 = 0$
31. Obtén la longitud de la cuerda de la parábola $x - y^2 = 0$, la cual es un segmento de la recta $x - y - 6 = 0$
32. Una parábola tiene su vértice en el origen e interseca a la recta $x + 4y - 9 = 0$, en el punto donde su abscisa es la mitad de su ordenada. Encuentra la ecuación de la parábola (dos soluciones).
33. Determina la ecuación de la parábola con eje horizontal y vértice en el origen, que pase por los puntos de intersección de la curva $x^2 + y^2 - 18 = 0$, y la recta $x - y = 0$ (dos soluciones).
34. Obtén la ecuación de la parábola de vértice en el origen y cuyo lado recto es el diámetro vertical de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0$
35. Determina la ecuación de la parábola de vértice en el origen y que tiene como lado recto el diámetro horizontal de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$

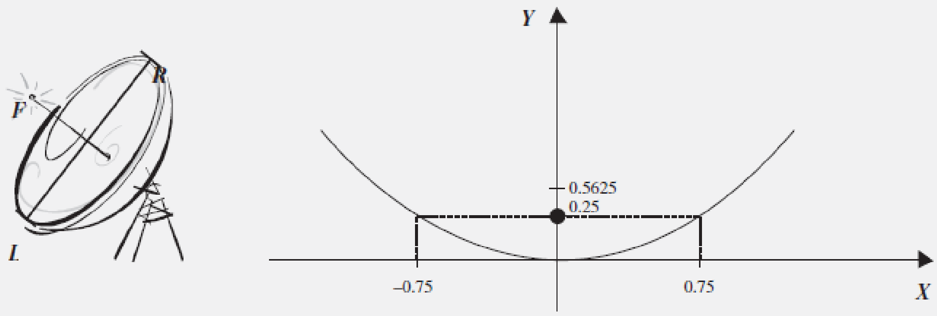
Problemas de aplicación

Ejemplos

El diámetro de una antena parabólica es de 1.5 metros y su profundidad es de 25 centímetros. ¿A qué altura se debe colocar el receptor?

Solución

La reflexión es una de las propiedades importantes de la parábola. Cuando una onda emana del foco y choca con la parábola se produce una reflexión paralela al eje y viceversa si la onda viaja paralela al eje, al chocar con la parábola, se refleja y cruza por el foco. Luego, si se gira una parábola sobre su eje, se obtiene una superficie en revolución llamada paraboloide, es la forma que tienen precisamente las antenas parabólicas.



Se construye una parábola con vértice en el origen y eje vertical, si el diámetro de la antena es de 1.5 metros y su fondo mide 25 cm, entonces la parábola por ser simétrica, pasa por los puntos (– 0.75, 0.25) y (0.75, 0.25), por tanto sustituimos uno de estos puntos en la ecuación:

$$x^2 = 4py, \text{ para despejar } p.$$

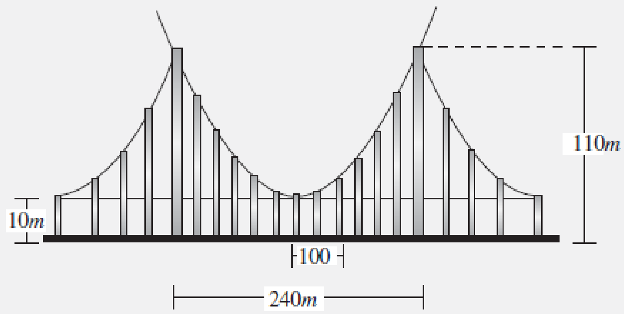
$$x^2 = 4py$$

$$(-0.75)^2 = 4p(0.25)$$

$$p = 0.5625$$

Las coordenadas del foco están dadas por $F(0, 0.5625)$, por consiguiente, se debe colocar el receptor a 56.25 centímetros del vértice.

Las dos torres de un puente colgante, como se muestra en la figura tienen una separación de $240m$ y una altura de $110m$, si el puntal más corto mide $10m$ determina la altura de un puntal que se encuentra a $100m$ del centro.

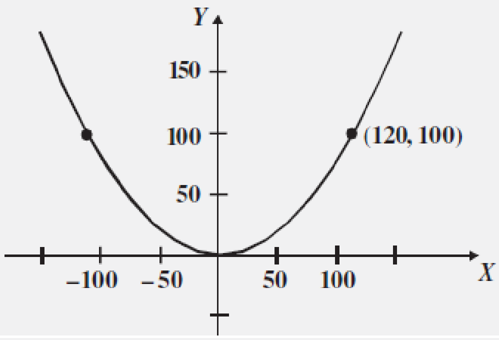


Solución

Se construye una parábola con vértice en el origen y eje vertical, si las torres están separadas $240m$ y su altura con respecto al vértice de la parábola es de $100m$ ($110m - 10m = 100m$), entonces la parábola pasa por los puntos:

$$(-120, 100) \text{ y } (120, 100)$$

Se sustituye el punto (120, 100) en la ecuación $x^2 = 4py$ para obtener p.



$$x^2 = 4py$$

$$(120)^2 = 4p(100)$$

$$p = 36$$

Por tanto, la ecuación es

$$x^2 = 4(36)y \qquad \rightarrow \qquad x^2 = 144y$$

Para encontrar la ordenada cuya abscisa es $x = 100$, se sustituye en la ecuación obtenida:

$$(100)^2 = 144y$$

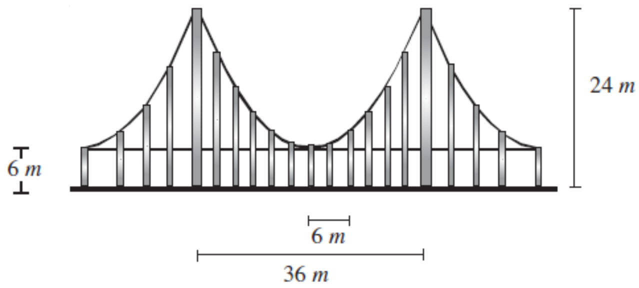
$$y = 69.44$$

El puntal que se encuentra a 100 metros del centro mide:

$$69.44m + 10m = 79.4m$$

Problemas propuestos

1. Dos torres de 24 metros de altura sostienen un puente colgante, como el que se muestra en la figura. Si las torres están separadas 36 metros y el puntal más corto mide 6 metros, ¿cuál es la altura de un puntal que se encuentra a 6 metros del centro?



2. El diámetro de una antena parabólica es de 2 m y su profundidad es de 40 cm. ¿A qué altura se debe colocar el receptor?
3. Se desea diseñar un faro que tenga 30 centímetros de diámetro. El filamento de la bombilla se encuentra a 3 cm del vértice. ¿Qué profundidad debe tener el faro si se quiere que el filamento quede justo en la posición de su foco?
4. Si en el ejercicio anterior se quiere que el faro tenga 2.75 cm menos de profundidad, ¿cuánto debe medir el diámetro?
5. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 8y = 0$ en el punto $(4, 2)$