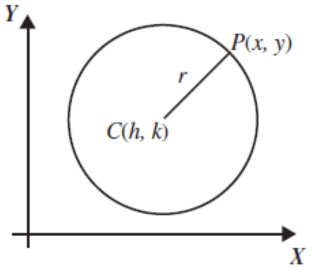
**Clase #50**

**Tema: Circunferencia**

## Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia a un punto fijo llamado centro, siempre es constante.




Definición:

$$d_{CP} = r \rightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elementos:

$C$: centro

$r$: radio

$P(x, y)$: punto cualquiera de la circunferencia

## Ecuaciones de la circunferencia

Las formas de expresar la ecuación de una circunferencia son las siguientes:

### Ecuación en su forma ordinaria

Ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(h, k)$ y radio $r$.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

### Ecuación en su forma general

Esta ecuación se obtiene al desarrollar los binomios e igualar a cero la ecuación ordinaria.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ con } A = C$$

### Ecuación en su forma canónica

Si el centro de la circunferencia se encuentra en el origen, entonces su ecuación es de la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Análisis de la ecuación de una circunferencia

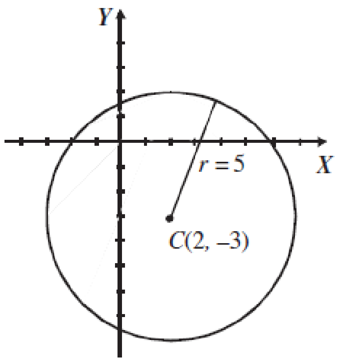
- Si $r$ es positivo la circunferencia es real.
- Si $r$ es negativo la circunferencia es imaginaria.
- Si $r$ es igual a cero entonces representa un punto.

Ejemplo

Encuentra la ecuación general de la circunferencia con centro en (2, – 3) y radio 5.

**Solución**

Se sustituyen el centro y el radio en la ecuación ordinaria y se transforma a su forma general:




$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$
$$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = (5)^2$$
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 25$$
$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

Se concluye que la ecuación general de la circunferencia es $x^2 + y^2 - 4y + 6y - 12 = 0$

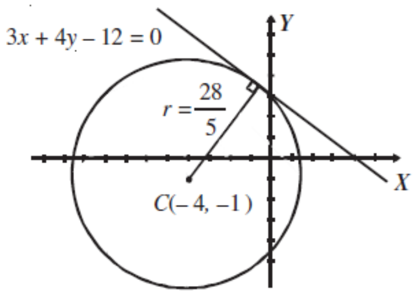
Obtén la ecuación general de la circunferencia con centro en (– 4, – 1) y que es tangente a la recta $3x + 4y - 12 = 0$.

**Solución**

El radio de la circunferencia es la distancia del centro a la recta tangente.

$$r = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3(-4) + 4(-1) - 12|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|-12 - 4 - 12|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|-28|}{\sqrt{9+16}} = \frac{28}{\sqrt{25}} = \frac{28}{5}$$

Se sustituyen $r = \frac{28}{5}$ y el centro $C(-4, -1)$ en la forma ordinaria:




$$(x - (-4))^2 + (y - (-1))^2 = \left(\frac{28}{5}\right)^2$$
$$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = \frac{784}{25}$$
$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = \frac{784}{25}$$
$$x^2 + y^2 + 8x + 2y - \frac{359}{25} = 0$$
$$25x^2 + 25y^2 + 200x + 50y - 359 = 0$$

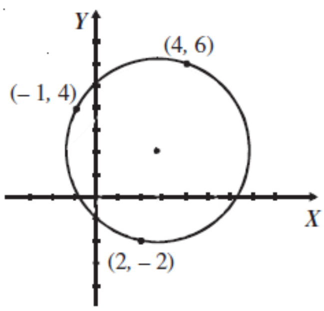
Por tanto, la ecuación general de la circunferencia es: $25x^2 + 25y^2 + 200x + 50y - 359 = 0$.

Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2, -2)$, $B(-1, 4)$ y $C(4, 6)$.

**Solución**

Existen dos formas de resolver el problema:

1. Sustituir todos los puntos en la ecuación general y resolver el sistema de ecuaciones.
2. Obtener el centro con la intersección de las mediatrices de los segmentos formados por los puntos y posteriormente el radio con la distancia del centro a cualquiera de los tres puntos.



Aplicación de la primera opción:

La ecuación general es $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, entonces si $A = C = 1$, se convierte en $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Sustitución del punto $A(2, -2)$

$$(2)^2 + (-2)^2 + D(2) + E(-2) + F = 0$$

$$4 + 4 + 2D - 2E + F = 0$$

Primera ecuación: $2D - 2E + F = -8$

Una circunferencia tiene su centro en el origen y su radio es de 6 unidades. ¿Cuál es su ecuación en forma general?

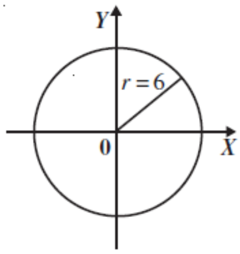
**Solución**

Se sustituye $r = 6$ en la forma canónica de la ecuación de la circunferencia y se transforma a la forma general:

$$x^2 + y^2 = 6^2$$

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 36 = 0$$




Aplicación de la primera opción:

La ecuación general es $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, entonces si $A = C = 1$, se convierte en $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Sustitución del punto $A(2, -2)$

$$(2)^2 + (-2)^2 + D(2) + E(-2) + F = 0$$

$$4 + 4 + 2D - 2E + F = 0$$

Primera ecuación: $2D - 2E + F = -8$

Sustitución del punto $B(-1, 4)$

$$(-1)^2 + (4)^2 + D(-1) + E(4) + F = 0$$

$$1 + 16 - D + 4E + F = 0$$

Segunda ecuación: $-D + 4E + F = -17$

Sustitución del punto $C(4, 6)$

$$(4)^2 + (6)^2 + D(4) + E(6) + F = 0$$

$$16 + 36 + 4D + 6E + F = 0$$

Tercera ecuación: $4D + 6E + F = -52$

Resulta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, resolviendo:

$$2D - 2E + F = -8$$
$$-D + 4E + F = -17$$
$$4D + 6E + F = -52$$

Se obtienen los valores de $D$, $E$ y $F$,

$$D = -\frac{16}{3},\ E = -\frac{25}{6} \text{ y } F = -\frac{17}{3}$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación general:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Por tanto, se concluye que la ecuación es:

$$x^2 + y^2 - \frac{16}{3}x - \frac{25}{6}y - \frac{17}{3} = 0$$

Ahora bien, al multiplicar por seis para eliminar los denominadores, se obtiene:

$$6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$$

## Ejercicios propuestos

De los siguientes ejercicios, encuentra la ecuación en su forma general:

1. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio de 4 unidades?
2. Determina la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y radio de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ unidades.
3. Encuentra la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $C(1, -3)$ y radio de 2 unidades.
4. Obtén la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ y radio de $\frac{5}{6}$.
5. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y que pasa por el punto $(2, -3)$?
6. Encuentra la ecuación de la circunferencia de diámetro el segmento formado por los puntos $A(-4, 7)$ y $B(6, -1)$.
7. Determina la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $C(1, -3)$ y que pasa por el punto $(4, 3)$.
8. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en $(-1, -5)$ y es tangente al eje $Y$?
9. El centro de una circunferencia es el punto $(5, -2)$ y pasa por el origen. ¿Cuál es su ecuación?
10. Obtén la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $(-4, 2)$ y diámetro 8.
11. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que es tangente a los ejes coordenados, su radio es de 5 unidades y su centro está en el cuarto cuadrante?
12. Una circunferencia tiene su centro en el eje $X$ y pasa por los puntos $(-1, 5)$ y $(2, 3)$. Determina su ecuación.
13. El centro de una circunferencia está en el eje $Y$ y pasa por $(0, -2)$ y $(3, -6)$. Encuentra su ecuación.
14. Una circunferencia tiene su centro en $(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$. ¿Cuál es su ecuación?
15. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en $(4, -3)$ y que es tangente a la recta $3x + 4y - 10 = 0$?
16. El radio de una circunferencia es 4 y su centro está en las intersecciones de las rectas $x + 3y - 7 = 0$ y $2x + 5y - 12 = 0$. Obtén su ecuación.
17. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $2x - 3y - 6 = 0$, $3x + y + 13 = 0$, además, es tangente a la recta $5x + 12y - 106 = 0$.
18. Una circunferencia pasa por el punto $(1, -6)$ y su centro está en la intersección de las rectas $4x - 7y + 10 = 0$ y $7x + 3y - 13 = 0$. Encuentra su ecuación.

Encuentra las ecuaciones de las circunferencias que pasan por los siguientes puntos.

19. $(3, 4)$, $(2, -1)$ y $(0, -3)$
20. $(9, -1)$, $(7, 3)$ y $(4, -8)$
21. $(-2, -2)$, $(-2, 1)$ y $(7, 0)$
22. $(-1, -1)$, $(1, 1)$ y $(5, -3)$