ENCUENTRO # 48
TEMA:Geometría analítica.

CONTENIDOS:

1. Distancia entre puntos.

2. Pendiente de una recta.Criterios de paralelismo y perpendicularidad Ángulo entre rectas.

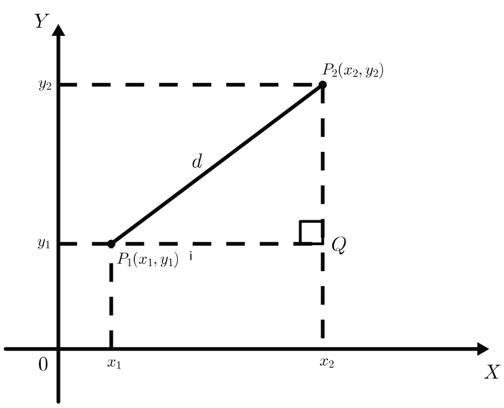
Ejercicio reto

1. Si $\operatorname{sen} x = 3\cos x$, entonces $\operatorname{sen} x \cos x =$?
   A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{1}{4}$

2. Desde un faro F que se encuentra en la costa, se observa un barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa; y un barco B, bajo un ángulo de 21°. El barco está a $5km$ de la costa, y el B a $3km$. La distancia entre los barcos es:
   A)4,16km B)2,15km C)3,76km D)3,16km E)4,35km

Distancia entre dos puntos

Dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos del plano, la distancia que existe entre ellos se determina de la siguiente forma:



En el triángulo P_1QP_2, por el teorema de Pitágoras:

$$(\overline{P_1P_2})^2 = (\overline{P_1Q})^2 + (\overline{QP_2})^2$$

donde $\overline{P_1P_2} = d$, $\overline{P_1Q} = x_2 - x_1$ y $\overline{QP_2} = y_2 - y_1$, entonces:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 1.1. *¿Cuál es la distancia entre los puntos $A(6,3)$ y $B(3,-1)$?*
Solución
Se sustituye en la fórmula, $x_1 = 6$, $y_1 = 3$, $x_2 = 3$ y $y_2 = -1$ y se obtiene:

$$d = \sqrt{(3-6)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Ejemplo 1.2. *Demuestra que el triángulo ABC formado por los puntos $A(-1,-3)$, $B(6,1)$ y $C(2,-5)$ es rectángulo.*
Demostración
El triángulo es rectángulo si la suma de los cuadrados de sus lados menores (catetos) es igual al cuadrado del lado mayor (hipotenusa).
Se aplica la fórmula de distancia para obtener la longitud de cada lado del triángulo:

$$d_{AB} = \sqrt{(6-(-1))^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{(7)^2 + (4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(2-6)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$
$$d_{AC} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-5-(-3))^2} = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$d_{AB}^2 = d_{BC} + d_{AC}$$
$$\sqrt{65}^2 = \sqrt{52}^2 + \sqrt{13}^2$$
$$65 = 52 + 13$$
$$65 = 65$$

→ *Se demuestra entonces que el triángulo ABC es rectángulo.*

Ejercicios Propuestos

Encuentra la distancia entre los siguientes pares de puntos:

1. $A(-2,-7), B(6,-1)$
2. $A(4,2), B(5,0)$
3. $A(0,2), B(7,3)$
4. $A(3\sqrt{6}; -2\sqrt{10}), B(5\sqrt{6}, -4\sqrt{10})$
5. $A(3, \frac{1}{2}), B(\frac{4}{3}, -1)$
6. $A(-\frac{1}{4}, \frac{1}{6}), B(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6})$

7. $A(-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}),B(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4})$

→ Calcula el perímetro de los triángulos, cuyos vértices son los siguientes puntos:

1. $A(-2,2),B(7,-1),C(3,-8)$

2. $J(3,1),K(2,7),L(-1,6)$

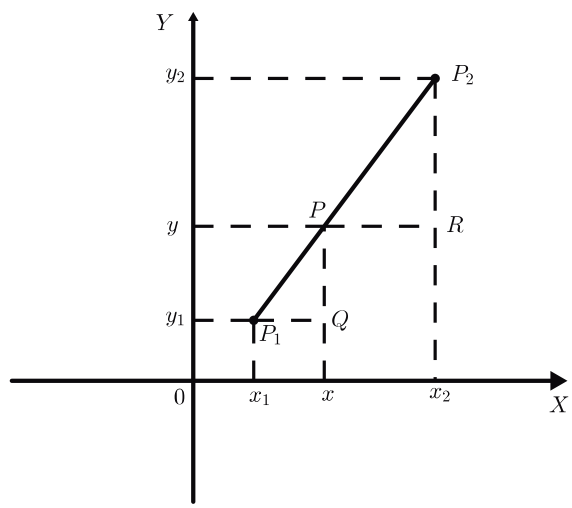
3. $M(1,2),N(5,3),P(-3,-6)$

4. $P(0,0),Q(0,4),R(3,0)$

→ Verifica que los puntos $A(-2,-3),B(-4,-5),C(-1,-6)$, son los vértices de un triángulo isósceles.

División de un segmento en una razón dada

Sean $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ los extremos de un segmento de recta, entonces la razón en que el punto $P(x,y)$ divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en dos partes proporcionales se define como:$r\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$.



Por geometría, los triángulos P_1PQ y PP_2R son semejantes, la proporcionalidad que existe entre sus lados es:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\frac{\overline{P_1Q}}{\overline{PR}}=\frac{\overline{QP}}{\overline{RP_2}}$$

Por otro lado: $\overline{P_1Q}=x-x_1,\overline{PR}=x_2-x,$

$$\overline{QP}=y-y_1,\overline{RP_2}=y_2-y$$

Entonces:

$$r=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}$$

1. Para determinar la razón dados los extremos y el punto de división se emplea:

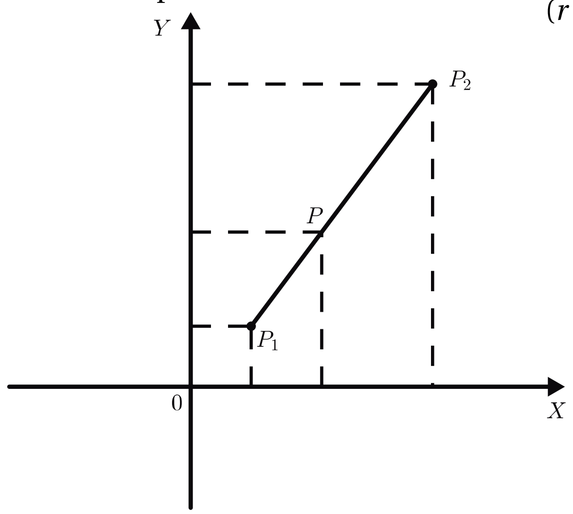
$$r=\frac{x-x_1}{x_2-x}\text{ o }r=\frac{y-y_1}{y_2-y}$$

2. Para encontrar el punto de división dados los extremos y la razón se utiliza:

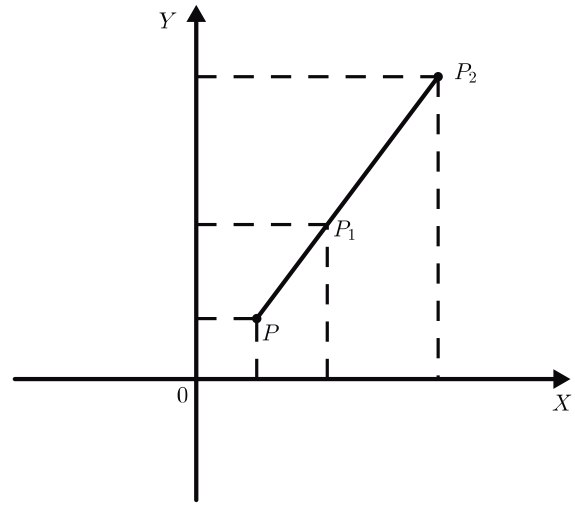
$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r},\ y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

El signo de la razón indica si el punto de división se ubica entre los extremos del segmento o fuera de ellos sobre la misma recta.

Cuando $P(x, y)$ está en el segmento $\overline{P_1P_2}$, la razón es positiva $(r > 0)$.



Cuando $P(x, y)$ está en la prolongación del segmento, la razón es negativa $(r < 0)$.



Ejemplo 1.3. *¿Cuál es la razón en la que el punto $P(2, 7)$ divide al segmento de recta determinado por los puntos $P_1(-1, 1)$ y $P_2(6, 15)$?* ***Solución***

Se sustituyen los valores de $x = 2$, $x_1 = -1$ y $x_2 = 6$, en la fórmula:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{2 - (-1)}{6 - 2} = \frac{3}{4}$$

Por consiguiente, el valor de la razón es:$\frac{3}{4}$ Se obtiene el mismo valor de r si se toman los valores de las ordenadas y se sustituyen en la fórmula:

$$y = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{7 - 1}{15 - 7} = \frac{3}{4}$$

Ejemplo 1.4. *¿Cuál es la razón en la que el punto $P(10, 7)$ divide al segmento de la recta, cuyos extremos son los puntos $P_1(-5, 2)$ y $P_2(1, 4)$?*

Solución

Se sustituye $y = 7$, $y_1 = 2$ y $y_2 = 4$ en la siguiente fórmula:

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{7 - 2}{4 - 7} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

Esta misma razón se obtiene al sustituir los valores de x.

En consecuencia, la razón es $r = -\frac{5}{3}$, el signo menos indica que el punto P se encuentra sobre la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2, pero no entre ellos.

Ejemplo 1.5. *Determina las coordenadas del punto $P(x,y)$ que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en una razón $r=-\frac{2}{7}$, y cuyos extremos son los puntos $P_1(0,3)$ y $P_2(7,4)$.*
Solución

$$x=\frac{0+\left(-\frac{2}{7}\right)7}{1+\left(-\frac{2}{7}\right)}=\frac{-\frac{2}{1}}{\frac{5}{7}}=-\frac{14}{5}\qquad x=\frac{3+\left(-\frac{2}{7}\right)4}{1+\left(-\frac{2}{7}\right)}=\frac{\frac{13}{7}}{\frac{5}{7}}=\frac{13}{5}$$

Por tanto, el punto de división tiene como coordenadas $P\left(-\frac{14}{5},\frac{13}{5}\right)$

Ejercicios propuestos

→ Determina la razón $r=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ en que el punto P divide al segmento de recta de extremos P_1 y P_2.

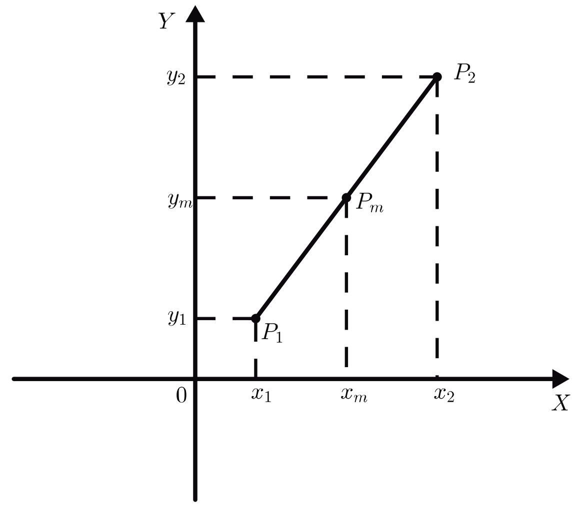
1. $P_1(0,2),P_2(-2,4),P(2,0)$
2. $P_1(-1,4),P_2(0,3),P(3,0)$
3. $P_1(3,-4),P_2(0,2),P(2,-2)$
4. $P_1(3,5),P_2(-1,4),P(-5,3)$
5. $P_1(\frac{1}{2},\frac{3}{4}),P_2(2,1),P(\frac{1}{3},\frac{13}{18})$
6. $P_1(-5,1),P_2(4,3),P(-3,\frac{13}{9})$

→ Dados los extremos P_1,P_2 y la razón $r=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$, encuentra las coordenadas del punto de división P del segmento $\overline{P_1P_2}$

1. $P_1(4,1),P_2(5,-2),r=-2$
2. $P_1(0,5),P_2(6,-1),r=5$
3. $P_1(-2,3),P_2(4,5),r=\frac{2}{3}$
4. $P_1(-\frac{2}{3},0),P_2(0,4),r=\frac{1}{2}$
5. $P_1(5,-6),P_2(1,0),r=\frac{1}{3}$

Punto medio de un segmento de recta

El punto medio del segmento de recta con extremos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, es aquel punto $P_m(x_m, y_m)$ que lo divide en dos segmentos iguales.



Si el punto $P_m = P$ divide a $\overline{P_1P_2}$ en dos segmentos de recta iguales, entonces: $\overline{P_1P} = \overline{PP_2}$

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{PP_2}}{\overline{P_1P}} = 1$$

Por tanto, las coordenadas del punto medio son:

$$P_m\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo 1.6. *Determina las coordenadas del punto medio del segmento, cuyos extremos son los puntos $P_1(5,7)$ y $P_2(1,-3)$*

Solución

Se sustituye $x_1 = 5$, $y_1 = 7$ y $x_2 = 1$, $y_2 = -3$, en las fórmulas:

$$x_m = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad y_m = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{7+(-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

En consecuencia, el punto medio tiene coordenadas: $P_m(3,2)$.

Ejercicios Propuestos

→ Determina las coordenadas del punto medio de los segmentos de recta definidos por los puntos:

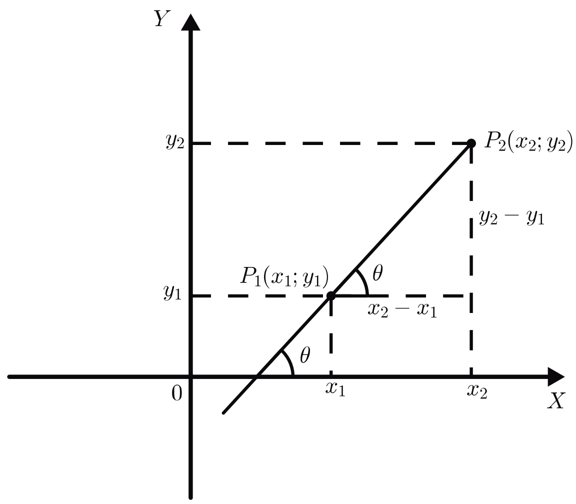
1. $P_1(3,5), P_2(2,-1)$
2. $P_1(0,4), P_2(3,7)$
3. $P_1(-1,3), P_2(9,11)$
4. $P_1(5,-7), P_2(11,-4)$
5. $P_1(\frac{1}{2},1), P_2(\frac{1}{3},2)$
6. $P_1(\frac{2}{3},-2), P_2(\frac{1}{4},1)$

Pendiente de una recta

Sea la recta l que pasa por los puntos P_1 y P_2, entonces su pendiente se define como:

$$m\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Demostración



La pendiente de la recta l es

$$m=\tan\theta$$

En el triángulo P_1MP_2

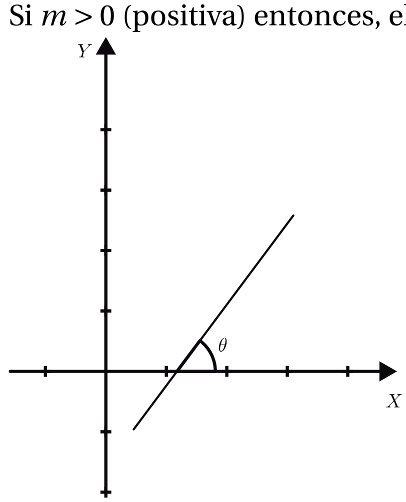
$$\tan\theta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Por consiguiente:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

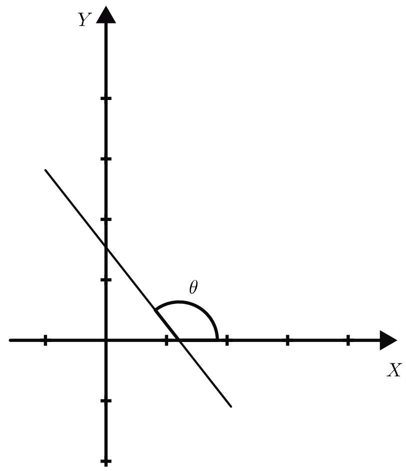
Los casos que se presentan para el valor de la pendiente y su ángulo de inclinación, son los siguientes:

1. Si $m>0$ (positiva) entonces, el ángulo es agudo.



Si $m>0$, entonces, $0° < \theta < 90°$

2. Si $m<0$ (negativa) entonces, el ángulo es obtuso.



••Si $m < 0$, entonces, $90° < \theta < 180°$

Ejemplo 1.7. *Una recta pasa por los puntos* $A(-2,-1)$ *y* $B(3,4)$*. Determina su pendiente y el ángulo de inclinación.*

Solución

Se sustituyen los valores de las abscisas y ordenadas en la fórmula:$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$m = \frac{4-(-1)}{3-(-2)} = \frac{4+1}{3+2} = f\frac{5}{5} = 1$$

Luego, si $m = 1$ *entonces,* $tan\theta = 1$*, en consecuencia:*

$$\theta = \arctan(1) = 45°$$

Ejercicios propuestos

→ Determina la pendiente de los siguientes pares de puntos:

1. $A(-3,5), B(2,7)$
2. $A(-1,2), B(4,-5)$
3. $A(5,\sqrt{3}), B(5,1)$
4. $A(\frac{1}{2},7), B(3,-\frac{3}{2})$
5. $A(\frac{3}{5},\frac{2}{3}), B(-\frac{3}{5},\frac{3}{4})$

→ Encuentra la medida de los ángulos de inclinación de las rectas que pasan por los siguientes puntos:

1. $P(5,7), Q(2,4)$
2. $A(-1,2), B(-2,3)$

3. $A(\sqrt{3},3), B(0,2)$

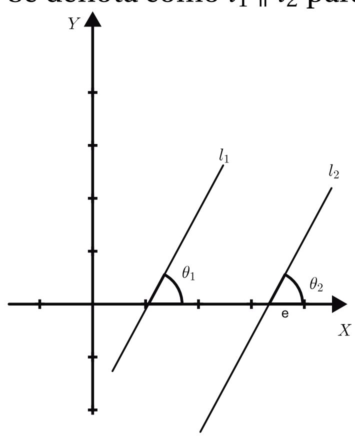
4. $A(3,\sqrt{2}), B(1,0)$

Condición de paralelismo

Dos rectas son paralelas si sus ángulos de inclinación son iguales y, por tanto, sus pendientes también.

$$m_1 = m_2$$

Se denota como $l_1 \parallel l_2$ para indicar l_1 es paralela a l_2



Si $l_1 \parallel l_2$ entonces $\theta_1 = \theta_2$
Por ser correspondientes. Aplicando la función tangente

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$$

Finalmente, se determina que:

$$m_1 = m_2$$

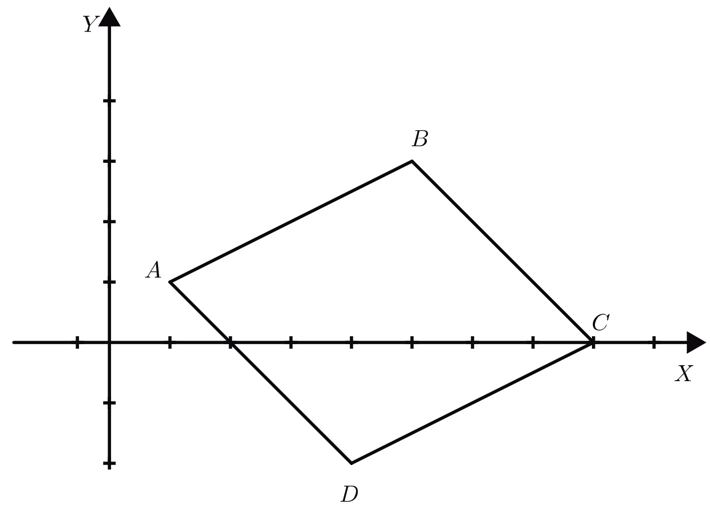
Ejemplo 1.8. *Demuestra que la recta l_1, que pasa por los puntos $A(1,1)$ y $B(5,3)$ es paralela a la recta l_2 que pasa por los puntos $C(8,0)$ y $D(4,-2)$.*
Solución
Se obtienen las pendientes de ambas rectas:

$$M_{AB} = \frac{3-1}{5-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad M_{CD} = \frac{-2-0}{4-8} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{|2}$$

Como $m_{AB} = m_{CD}$, entonces se demuestra que $l_1 \parallel l_2$.

Ejemplo 1.9. *Demuestra que los puntos $A(9,2)$, $B(11,6)$, $C(3,5)$ y $D(1,1)$, son vértices de un paralelogramo.*
Solución
Se determinan las pendientes de los lados:

$m_{AB} = \frac{6-2}{11-9} = \frac{4}{2} = 2 \qquad m_{BC} = \frac{5-6}{3-11} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$
$m_{CD} = \frac{1-5}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad m_{AD} = \frac{1-2}{1-9} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$

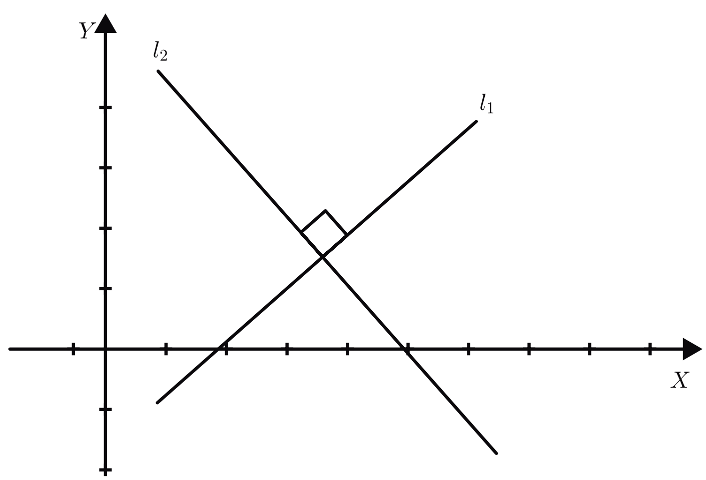


Condición de perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual *a*–1.
Si $l_1 \perp l_2$ (l_1 es perpendicular a $l-2$), es decir, las rectas forman un ángulo de 90°, entonces:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Por tanto $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ o $m_2 = -\frac{1}{m_1}$



Ejemplo 1.10. *Demuestra que la recta l_1, que pasa por los puntos $A(2,5)$ y $B(7,3)$, es perpendicular a la recta l_2, que pasa por los puntos $C(-1,-2)$ y $D(1,3)$.*

Solución

Se obtienen las pendientes de las rectas.

Pendiente de la recta l_1:

$$m_{AB} = \frac{3-5}{7-2} = -\frac{2}{5}$$

Pendiente de la recta l_2:

$$m_{AB} = \frac{3-(-2)}{1-(-1)} = \frac{5}{2}$$

Ahora se aplica la condición:

$$\left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = -1$$

Se demuestra que la rectal_1 es perpendicular a la recta l_2.

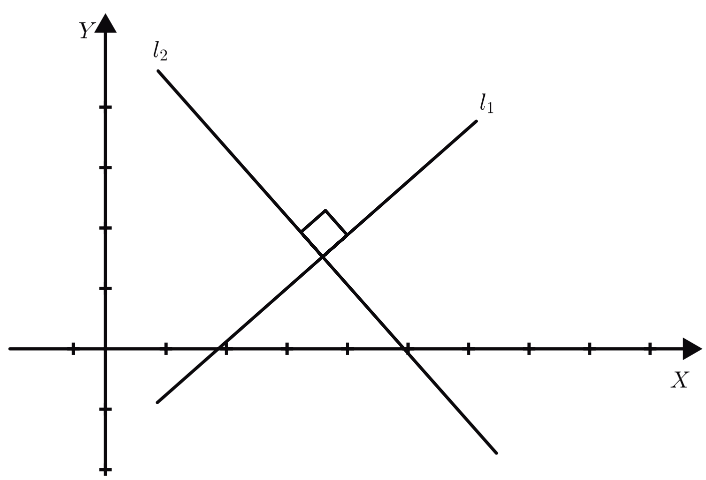
Ejemplo 1.11. *Demuestra que los lados adyacentes del cuadrilátero, cuyos vértices son los puntos $A(0,9)$, $B(3,1)$, $C(11,4)$ y $D(8,12)$, son perpendiculares entre sí.*

Solución

Se determinan las pendientes de los lados:

$$m_{AB} = \tfrac{1-9}{3-0} = -\tfrac{8}{3} \qquad m_{BC} = \tfrac{4-1}{11-3} = \tfrac{8}{3} \qquad m_{CD} = \tfrac{12-4}{8-11} = -\tfrac{8}{8} \qquad m_{AD} = \tfrac{12-9}{8-0} = \tfrac{3}{8}$$

En la figura:



Se observa que los lados adyacentes son:

$$\overline{AB} \text{ y } \overline{BC}, \overline{BC} \text{ y } \overline{CD}, \overline{CD} \text{ y } \overline{AD}, \overline{AD} \text{ y } \overline{BC}$$

Ahora se multiplican las pendientes de los lados adyacentes para demostrar que son perpendiculares:

$$m_{AB} \cdot m_{BC} = (-\tfrac{8}{3})(\tfrac{3}{8}) = -1 \qquad m_{BC} \cdot m_{CD} = (\tfrac{3}{8})(-\tfrac{8}{3}) = -1$$
$$m_{CD} \cdot m_{AD} = (-\tfrac{8}{3})(\tfrac{3}{8}) = -1 \qquad m_{AD} \cdot m_{AB} = (\tfrac{3}{8})(-\tfrac{8}{3}) = -1$$

De aquí se determina que:

$$\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{BC} \perp \overline{CD}, \overline{CD} \perp \overline{AD}, \overline{AD} \perp \overline{BC}$$

Entonces, se demuestra que los lados adyacentes son perpendiculares entre sí.

Ejercicios propuestos

1. Averigua si la recta l_1 que pasa por los puntos $A(3,-1)$ y $B(-6,5)$ es paralela o perpendicular a la recta l_2 que pasa por los puntos $C(0,2)$ y $D(-2,-1)$.

2. Comprueba por medio de pendientes que los puntos $A(1,3)$, $B(2,6)$, $C(7,8)$ y $D(6,5)$, son vértices de un paralelogramo.

3. Demuestra que la recta que pasa por los puntos $A(-2,1)$ y $B(1,-4)$, es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(8,-7)$ y $D(5,-2)$.

4. Comprueba por medio de pendientes que los puntos $A(3,1)$, $B(7,3)$ y $C(1,5)$, son los vértices de un triángulo rectángulo.

5. Demuestra que los cuatro puntos $A(-3,1)$, $B(-2,5)$, $C(2,4)$ y $D(1,0)$, son vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares.

6. Una recta l_1 pasa por los puntos $(-2,-1)$ y $(2,3)$, y otra recta l_2 pasa por el punto $(-1,2)$ y el punto A, cuya ordenada es -4. Determina la abscisa del punto A cuando l_1 es perpendicular a l_2.

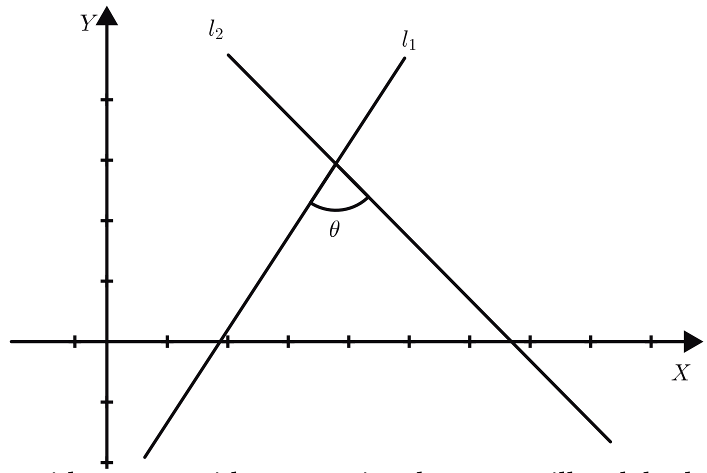
7. Demuestra por medio de pendientes que los puntos $A(-2,-1)$, $B(-4,3)$, $C(3,5)$ y $D(5,1)$, son vértices de un paralelogramo.

Ángulo entre dos rectas

Para encontrar el ángulo u formado por las rectas l_1 y l_2 se utiliza la fórmula:

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Donde: θ: Ángulo entre las rectas
m_1: pendiente inicial de la recta l_1
m_2: pendiente final de la recta l_2



Se debe de tomar en cuenta que los ángulos se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj; en la recta que inicie el ángulo, será la pendiente inicial, y en la recta que termine, la pendiente final.

Ejemplo 1.12. *Determina la medida del ángulo obtuso que forman las rectas, cuyas pendientes son 2 y –3.*

Solución

En este caso no importa cuál sea la pendiente inicial o final, se escoge $m_1 = 2$ *y* $m_2 = -3$, *se sustituyen en la fórmula y se obtiene:*

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2 = \frac{-3-2}{1+(-3)(-2)}} = \frac{-5}{-5} = 1$$

De aquí, $\tan\theta = 1$ *entonces:* $\theta = \arctan(1) = 45°$.

El ángulo obtuso ω *se determina al calcular el suplemento de* θ

$$45° + \omega = 180° \quad \omega = 180° - 45° \quad \omega = 135°$$

Ejercicios propuestos

1. Determina la medida del ángulo agudo que forman las rectas con pendientes $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$.

2. ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos interiores del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-2,2)$, $B(1,-1)$ y $C(0,-4)$?

3. Determina los ángulos interiores del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-4,1)$, $B(2,3)$ y $C(1,-4)$.

4. Demuestra que los puntos $A(-2,1)$, $B(3,5)$ y $C(7,0)$, son los vértices de un triángulo isósceles y encuentra la medida de sus ángulos interiores.

5. Comprueba que los puntos $A(3,1)$, $B(7,3)$ y $C(5,2)$, son vértices de un triángulo rectángulo y encuentra la medida de sus ángulos agudos.

6. Encuentra la medida del ángulo obtuso del paralelogramo cuyos vértices son los puntos $A(-4,1)$, $B(-2,4)$, $C(5,5)$ y $D(3,2)$.