

ENCUENTRO # 37

TEMA: Ecuaciones logarítmicas

CONTENIDOS:

1. Ecuaciones Logarítmicas.

Ejercicio Reto

1. **Examen UNA 2014** La solución de $8^{4x-8} - 9 = -8$ es:

A) $x = 2$ B) $x = 3$ C) $x = 1$ D) $x = -2$ E) $x = 0$

2. El dominio y el rango de la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 6$, son respectivamente:

A) \mathbb{R} y $[-2, 6]$ B) $(-1, 1)$ y $[-2, 6]$ C) $[-2, 6]$ y \mathbb{R} D) \mathbb{R} y $[-1, 6]$ E) \mathbb{R} y $(-\infty, 6]$

Definición 1. Las ecuaciones en las cuales la variable forma parte del argumento de un logaritmo se llaman ecuaciones logarítmicas.

Ejemplos

1. $1 + \log_2 x = 4$
2. $\log_3(x^2 + 5x) = \log_3(27 - x)$
3. $\log_5^2 x - 3 \log_5 x + 2 = 0$

Como Resolver Ecuaciones Logarítmicas

1. Aplicar todas las propiedades de los logaritmos
2. Aplicar la monotonía de la potenciación
3. Resolver la ecuación obtenida.
4. Comprobar las posibles soluciones en la ecuación original.
5. Conjunto solución.

Ejemplo 1.1. Determina el valor de x en la ecuación $1 + \log_2 x = 4$.

Primera vía

$$1 + \log_2 x = 4$$

$$\log_2 x = 4 - 1$$

$$\log_2 x = 3 \text{ (aplicar definición)}$$

$$x = 2^3$$

$$x = 8$$

Comprobación

$$MI : 1 + \log_2 x \quad MD : 4$$

$$x = 8$$

$$1 + \log_2 8$$

$$1 + 3 = 4$$

$$S = \{8\}$$

$$MI = MD$$

Segunda vía

$$1 + \log_2 x = 4$$

$$\log_2 2 + \log_2 x = \log_2 16$$

$$\log_2 2x = \log_2 16$$

$$2x = 16$$

$$x = \frac{16}{2}$$

$$x = 8$$

Ejemplo 1.2. Halla el conjuntos solución de $\log_3(x^2 + 5x) = \log_3(27 - x)$.

Solución

Primera vía

$$\log_3(x^2 + 5x) = \log_3(27 - x)$$

$$x^2 + 5x = 27 - x$$

$$x^2 + 5x + x - 27 = 0$$

$$x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$(x + 9)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = -9 \quad x_2 = 3$$

Segunda vía

$$\log_3(x^2 + 5x) = \log_3(27 - x)$$

$$\log_3(x^2 + 5x) - \log_3(27 - x) = 0$$

$$\log_3 \frac{x^2+5x}{27-x} = 0$$

$$\frac{x^2+5x}{27-x} = 3^0$$

$$\frac{x^2+5x}{27-x} = 1 / \cdot (27 - x)$$

$$x^2 + 5x = 27 - x$$

$$x^2 + 5x + x - 27 = 0$$

$$x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$(x + 9)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = -9 \quad x_2 = 3$$

$$MI : \log_3(x^2 + 5x) \quad MD : \log_3(27 - x)$$

$$x = -9$$

$$MI : \log_3[(-9)^2 + 5(-9)] \quad MD : \log_3(27 - (-9))$$

$$MI : \log_3[81 - 45] \quad MD : \log_3(27 + 9)$$

$$MI : \log_3 36 \quad MD : \log_3 36$$

$$MI = MD$$

$$MI : \log_3(x^2 + 5x) \quad MD : \log_3(27 - x)$$

$$x = 3$$

$$MI : \log_3[(3)^2 + 5(3)] \quad MD : \log_3(27 - 3)$$

$$MI : \log_3[9 + 15] \quad MD : \log_3(24)$$

$$MI : \log_3 24 \quad MD : \log_3 24$$

$$MI = MD$$

$$S = \{-9, 3\}$$

Ejemplo 1.3. Determina para que valores de la variable se cumple la siguiente igualdad:

$$\log_5^2 x - 3 \log_5 x + 2 = 0$$

Solución

$$\log_5^2 x - 3 \log_5 x + 2 = 0 \quad (\text{cambio de variable } \log_5 x = a)$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$(a - 2)(a - 1) = 0$$

$$a = 2 \quad a = 1 \quad \text{Restaurar el valor de } a$$

$$\log_5 x = 2 \quad \log_5 x = 1$$

$$x = 5^2 = 25 \quad x = 5^1 = 5$$

Comprobación

$$MI : \log_5^2 x - 3 \log_5 x + 2 \quad MD : 0$$

$$x = 25$$

$$MI : \log_5^2(25) - 3 \log_5 25 + 2 \quad MD : 0$$

$$MI : 2^2 - 3(2) + 2 \quad MD : 0$$

$$MI : 4 - 6 + 2 \quad MD : 0$$

$$MI : 0 \quad MD : 0$$

$$MI = MD$$

$$MI : \log_5^2 x - 3 \log_5 x + 2 \quad MD : 0$$

$$x = 1$$

$$MI : \log_5^2(1) - 3 \log_5 1 + 2 \quad MD : 0$$

$$MI : 0^2 - 3(0) + 2 \quad MD : 0$$

$$MI : 0 - 0 + 2 \quad MD : 0$$

$$MI : 2 \quad MD : 0$$

$$MI \neq MD$$

$$S = \{25\}$$

Ejercicios Propuestos

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1. $\log_2(6x^2 - 7x + 5) = 3$

2. $\log_x(x^3 - x^2 - x + 2) = \log_x x^2$

3. $\log_{6-x} x = 5^{\log_5 2}$

4. $\log_3(\sqrt{2x} - \sqrt{x-7}) = \log_3 3$

5. $\log_7(x+3) = 1 \log_7(x-3)$

6. $\log_3(2x-1) - \log_3(x-1) - 1 = 0$

7. $\log_2(9^x - 17) - 1 = \log_2(3^{x+1} + 5)$

8. $\log_2(x^2 - 6x + 1) - \log_3(x - 3) = -1$

9. $\log(\sqrt{x} + 3) = 2 \log \sqrt{2x - 3}$

10. $\log_2 \sqrt{x+3} + \log_2 x = 1$

11. $\log x + \log(x+3) + 4 = 5$

12. $2 \log x = \log 2 + \log(x+4)$

13. $\log_{\sqrt{7}}(\sqrt{x+5} + x) = 2$

14. $\log_2(3^x + 1) + \log_2(3^x - 2) = \frac{\log 4}{\log 2}$