

## ENCUENTRO # 36

TEMA: Logaritmos. Propiedades

### CONTENIDOS:

1. Propiedades de los logaritmos

### Ejercicio Reto

1. El dominio de  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$  es:  
A)  $[-1, 1] - \{0\}$     B)  $(-1, 1) - \{0\}$     C)  $(-1, 1)$     D)  $[-1, 1]$     E)  $\mathbb{R} - \{0\}$
2. **Examen UNI 2015** Si  $x^x = 3$ , entonces el valor de  $\sqrt{x^{x^{x+1}} - x^{2x}}$  es de:  
A)  $2\sqrt{3}$     B)  $\sqrt{3}$     C)  $3\sqrt{2}$     D) 2    E) 6

## 1. Introducción

El término logaritmo lo acuñó el matemático escocés John Napier, a partir de los términos griegos *lógos* (razón) y *arithmós* (número) para designar a la correspondencia, que había descubierto, entre los términos de una progresión aritmética y otra geométrica. Al principio los llamó "números artificiales", pero luego cambió de opinión.

Al logaritmo que tiene por base el número  $e$  se le llama, en su honor, neperiano.

Pero fue el inglés Henry Briggs, un amigo de Napier, quien comenzó a usar los logaritmos con base 10. Briggs escribió acerca de su nuevo descubrimiento: "Los logaritmos son números que se descubrieron para facilitar la solución de los problemas aritméticos y geométricos, con su empleo se evitan todas las complejas multiplicaciones y divisiones, y se transforman en algo completamente simple, a través de la sustitución de la multiplicación por la adición y la división por la substracción. Además, el cálculo de las raíces también se realiza con gran facilidad".

**Definición 1** (Logaritmo). *El logaritmo de un número en una base determinada es el exponente al cual hay que elevar la base para obtener dicho número.*

$$\log_b N = a \quad \Leftrightarrow \quad a^b = N$$

con  $N$  y  $b$  números reales positivos y  $b$  diferente de 1.

**Nota:** El logarimo de base 10 se puede omitir la escritura de la base

Ejemplo

$$\log_{10} a = \log a$$

**Nota:** El logarimo de base  $e$  se escribe como  $\ln$  y se nombra logaritmo natural

Ejemplo

$$\log_e a = \ln a$$

Ejemplo # 1

Calcula

1.  $\log_3 9$

5.  $\log_{\frac{1}{2}} 2$

9.  $\log_{0.1} 1$

2.  $\log_2 8$

6.  $\ln e$

10.  $\log_{0.25} 16$

3.  $\log_2 \frac{1}{2}$

7.  $\ln 1$

4.  $\log_{\frac{1}{25}} 5$

8.  $\log_9 3$

**Solución**

$$\log_3 9 = 2 \rightarrow 3^2 = 9$$

$$\log_2 8 = 3 \rightarrow 2^3 = 8$$

$$\log_2 \frac{1}{2} = -1 \rightarrow 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{25}} 5 = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = 5$$

$$\ln e = 1 \rightarrow e^1 = e$$

$$\ln 1 = 0 \rightarrow e^0 = 1$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{2} \rightarrow 9^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$\log_{0.1} 10 = -1 \rightarrow (0.1)^{-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10$$

$$\log_{0.25} 16 = -2 \rightarrow (0.25)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$$

**Identidad logarítmica**

$$a^{\log_a b} = b$$

Ejemplos:

$$4^{\log_4 x^2} = x^2$$

$$e^{\ln(a+b)} = a + b$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{0.25} 2^{x-2}} = 2^{x-2}$$

$$9^{\log_9 \left(\frac{x^2-4}{3x^2-2x-5}\right)} = \frac{x^2-4}{3x^2-2x-5}$$

**Propiedades de los logaritmos**

Si  $a > 0$ ;  $a \neq 1$ ;  $b > 0$ ;  $c > 0$

1.  $\log_a b = x$  si y solo si  $a^x = b$  (Definición)

2.  $\log_a 1 = 0$

3.  $\log_a a = 1$

4.  $a^{\log_a b} = b$

5.  $\log_a b + \log_a c = \log_a (a \cdot b)$

6.  $\log_a b - \log_a c = \log_a (a \div b)$  ( $c \neq 0$ )

7.  $x \cdot \log_a b = \log_a b^x$

8.  $\log_a c \cdot \log_c b = \log_a b$ , ( $c \neq 1$ )

9.  $\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$ , ( $c \neq 1$ )

10.  $\frac{1}{x} \log_a b = \log_{a^x} b$

11.  $\log_a b = \log_a c \iff b = c$

**Ejemplo 1.1.** Desarrolla la expresión  $\log_3 x^{12}$  aplicando propiedades de los logaritmos  
**solución**

$$\log_3 x^{12} = 12 \log_3 x$$

**Ejemplo 1.2.** Desarrolla la expresión  $\log_2 3x^4 \sqrt{y}$  aplicando propiedades.  
**Solución**

$$\log_2 3x^4 \sqrt{y} = \log_2 3 + \log_2 x^4 + \log_2 y^{\frac{1}{2}} = \log_2 3 + 4 \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 y$$

**Ejemplo 1.3.** Desarrolla la expresión  $\log_y \sqrt[4]{(x-5)^3}$  aplicando propiedades.  
**Solución**

$$\log_y ((x-5)^3)^{\frac{1}{4}} = \log_y (x-5)^{3 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \log_y (x-5)$$

**Ejemplo 1.4.** Desarrolla la expresión  $\log_a \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2}$  aplicando propiedades.  
**Solución**

$$\log_a \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2} = \log_a (x+y)^3 - \log_a (x-y)^2 = 3 \log_a (x+y) - 2 \log_a (x-y)$$

**Ejemplo 1.5.** Desarrolla la expresión  $\ln \left[ \frac{e^{3x}(x+1)}{2x^2} \right]^3$  aplicando propiedades.  
**Solución**

$$\begin{aligned} \ln \left[ \frac{e^{3x}(x+1)}{2x^2} \right]^3 &= 3 \ln \left[ \frac{(e^x)^3(x+1)}{2x^2} \right] = 3[\ln(e^x)^3(x+1) - \ln 2x^2] \\ &= 3[3 \ln e^x + \ln(x+1) - (\ln 2 + 2 \ln x)] \end{aligned}$$

## Ejercicios de las propiedades de los logaritmos

I-Utiliza las propiedades de los logaritmos para desarrollar las siguientes:

1.  $\log_3 x^3 y^2 z$

2.  $\ln(3e^4 x^2)^2$

3.  $\ln \frac{xy^2}{e^3 z^4}$

4.  $\log_5 \frac{3x^2(1-2x)^6}{2x^y(x^2-y^2)}$

5.  $\log_4 \sqrt{3x^2 y^4}$

6.  $\log \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$

7.  $\log \frac{\sqrt{a^3 b}}{\sqrt[3]{c^2 d}}$

8.  $\log_2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{x-3}(x+z)^2}$

9.  $\log \sqrt{\frac{(x+3)(y-5)}{(x+6)^4 \sqrt{y-2}}}$

10.  $\ln \sqrt[3]{\frac{e^2 \sqrt{(x+1)^4 (x-1)^3}}{e^x \sqrt[5]{(x^2-1)^4}}}$

II-Aplica las propiedades de los logaritmos para expresar los siguientes logaritmos como el logaritmo de un solo argumento:

1.  $2 \ln 5 + 2 \ln x$

2.  $3 \log m - 2 \log n$

3.  $\frac{1}{5} \log m + 4 \log n$

4.  $-\frac{2}{3} \log_b(x+1) - \frac{1}{4} \log_b(x+2)$

5.  $\log 3 + \log y - \log x$

6.  $\log_2 x - \log_2 y - \log_2 z$

7.  $1 - \log_4(m-1) - \log_4(m+1)$

8.  $\frac{1}{8} \log x + \frac{1}{3} \log y - \frac{1}{4} \log z$

9.  $\ln 5 + 1 + \ln y - 7 \ln x$

10.  $2 - x + 3 \ln(x+y) - 3 \ln(x-y)$

11.  $\frac{2}{3} \log(x-2) - \frac{4}{5} \log(x+2) + 2 \log(x+1)$

12.  $x^2 + x + 1 - 2 \log x + 3 \log(x+1)$

13.  $2 \ln 9 + 4 \ln m + \ln p - 2 \ln 7 - 2 \ln x - 6 \ln y$

## Ejercicios de entrenamiento

1. Reducir:  $36^{\frac{1}{\log_2 6}} + e^{-2 \ln(\frac{1}{2})}$

A)9    B)8    C)6    D)e    D)1

2. Reducir  $W = \frac{\sqrt{\log^4 2 + \log^4 5 + 1}}{\log^2 2 + \log^2 5 + 1}$

A)1    B) $\frac{1}{2}$     C)2    D) $\sqrt{2}$     D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Reducir  $E = \frac{\ln 21}{\ln 3} - \frac{\ln 7}{\ln 3}$

A)1    B)2    C)3    D)7    D)21

4. El valor de  $Q = {}^{\log_3 2} \sqrt[4]{\log_3 4}$

A)4    B) $\sqrt{2}$     C) $\sqrt[3]{4}$     D)16    D)8

- 
5. Si  $A = 36^{\frac{\log_5 2}{\log_5 6}}$ , calcular:  $\log_A 16$   
A)1    B)2    C)3    D)4    D)5
6. Hallar  $x$  en la ecuación:  $e^{3 \ln 2} - 4^{\log_2 \sqrt{x}} = 0$  A)8    B)9    C)10    D)11  
D)12
7. La solución de  $\ln[\ln(\ln x)] = 1$  es:  
A) $e$     B) $2e$     C) $e^e$     D) $e^{e^e}$     D) $e^{e^{e^e}}$
8. la solución de  $\log_{\log x}(4) = 3$  es:  
A)1000    B)100    C) $10^{\sqrt{2}}$     D) $10^{\sqrt[3]{2}}$     D) $10^{\sqrt[3]{4}}$