

ENCUENTRO # 34

TEMA: Inecuaciones exponenciales.

CONTENIDOS:

1. Monotonía de la potenciación.
2. Inecuaciones exponenciales.

Ejercicio Reto

1. Si $f(x) + 2f(3 - x) = 4x + 5$, hallar $f(1)$
A) 6 B) $\frac{17}{3}$ C) $\frac{16}{3}$ D) $\frac{14}{3}$ E) 5
2. El conjunto solución de la ecuación: $1 = \sqrt{1 - \sqrt{4^{x+1} - 7 \cdot 16^x} + 2^x}$
A) $S = \{1\}$ B) $S = \{0\}$ C) $S = \{\frac{1}{2}\}$ D) $S = \{-1\}$ E) $S = \{-\frac{1}{2}\}$

1. Monotonía de la potenciación

1. Si $a > 1$, $x < y$ entonces $a^x < a^y$.
2. Si $0 < x < 1$, $x < y$ entonces $a^x > a^y$

Ejemplos

Para $a = 6$, con $2 < 5$ se cumple que $6^2 < 6^5$

Para $a = 0.1$; con $2 < 5$ se cumple que $0.1^2 > 0.1^5$

1. ¿Cuál de las siguientes cantidades es mayor?

(a) $\sqrt[4]{4}$ _____ $\sqrt[8]{8}$

(b) 5^{-2} _____ 5^4

(c) 0.75^6 _____ 0.75^{11}

(d) $3^{0.5}$ _____ $\sqrt[4]{3}$

(e) $(\frac{1}{2})^{\frac{3}{5}}$ _____ $(\frac{1}{2})^{-1}$

(f) $10^2 \div 10^5$ _____ $(10^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$

(g) $6^{2+\sqrt{2}} \bullet 6^{2-\sqrt{2}}$ _____ $(\frac{3}{5})^2$

Inecuación exponencial

Una desigualdad donde la variable aparece al menos en el exponente de una potencia recibe el nombre de inecuación exponencial.

Ejemplos:

$$5^{x+2} \leq 25 \quad 11^{3x-1} \bullet 121^x > 0 \quad (0.5)^x \leq 4$$

Algoritmo para resolver una inecuación exponencial

1. Transformar todas las potencias a una base común.
2. Aplicar todas las propiedades de las potencias. (hasta que queden dos potencias comparadas)
3. Aplicar la monotonía de la potenciación.
4. Resolver la inecuación obtenida.
5. Solución.

Resuelve las siguientes inecuaciones.

1. $7^{3x-1} > 49$

2. $8^{0.3-x} \geq 1$

3. $(\frac{1}{2})^{4x+3} < \frac{1}{2}$

$$7^{3x-1} > 49$$

Solución

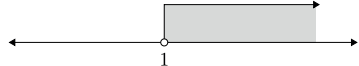
$$7^{3x-1} > 7^2$$

$$3x - 1 > 2$$

$$3x > 2 + 1$$

$$x > \frac{3}{3}$$

$$x > 1$$



$$S = x \in (1 + \infty)$$

$$8^{0.3-x} \geq 1$$

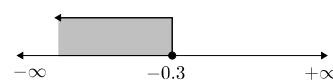
Solución

$$8^{0.3-x} \geq 8^0$$

$$0.3 - x \geq 0$$

$$-x \geq -0.3 / \bullet (-1)$$

$$x \leq 0.3$$



$$S = x \in (-\infty; -0.3]$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+3} < \frac{1}{2}$$

Solución

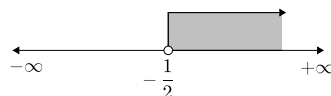
$$4x + 3 > 1$$

$$4x > 1 - 3$$

$$4x > -2$$

$$x > -\frac{2}{4}$$

$$x > -\frac{1}{2}$$



$$S = x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Ejemplos

Resuelve

1. $10 \cdot 2^{x^2-4} \geq 320$

2. $11^{x^2-2} \div 121 < 11^{x+2}$

3. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3x-1}{x}} \leq (0.2)^{2x}$

Solución

$$10 \cdot 2^{x^2-4} \geq 320$$

$$2^{x^2-4} \geq 320 \div 10$$

$$2^{x^2-4} \geq 32$$

$$2^{x^2-4} \geq 2^5$$

$$x^2 - 4 \geq 5$$

$$x^2 - 4 - 5 \geq 0$$

$$x^2 - 9 \geq 0$$

$$(x - 3)(x + 3) \geq 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$



$$S = x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3x-1}{x}} \leq (0.2)^{2x}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3x-1}{x}} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$$

$$\frac{3x-1}{x} \geq 2x$$

$$\frac{3x-1}{x} - 2x \geq 0$$

$$\frac{3x-1-2x^2}{x} \geq 0$$

$$\frac{-2x^2+3x-1}{x} \geq 0 \cdot (-1)$$

$$\frac{2x^2-3x+1}{x} \leq 0$$

$$\frac{(2x-1)(x-1)}{x} \leq 0$$

$$11^{x^2-2} \div 121 < 11^{x+2}$$

$$11^{x^2-2} \div 11^2 < 11^{x+2}$$

$$11^{x^2-2-2} < 11^{x+2}$$

$$11^{x^2-4} < 11^{x+2}$$

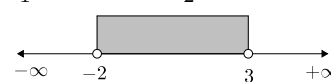
$$x^2 - 4 < x + 2$$

$$x^2 - 4 - x - 2 < 0$$

$$x^2 - x - 6 < 0$$

$$(x - 3)(x + 2) < 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$



$$S = x \in (-2; 3)$$

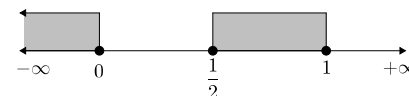
Cero del numerador

$$2x - 1 = 0 \quad x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 1$$

Cero del denominador

$$x = 0$$



$$S = x \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right)$$

Ejercicios Propuestos

Resuelve las siguientes inecuaciones:

1. $27 \cdot 3^x \geq 99$

2. $7^{3-2x} \leq 49$

3. $(\frac{1}{5})^{x+2.5} < (\frac{1}{5})^3$

4. $[9^{x-\sqrt{3}}]^{x+\sqrt{3}} > 1$

5. $2^{x^2} \cdot 2^{5x} > 64$

6. $5^{(3+x)(3-x)} \geq 5^{x(x+1)} \div 5^6$

7. $(7^{3+x})^{3-x} \geq \frac{7^{x(x+1)}}{7^6}$

8. $3^{\frac{1}{x+1}} \cdot 9^{\frac{1}{x+3}} > 3^{\frac{3}{x+2}}$

9. $(0.25)^{\frac{7x-4}{x+2}} \leq \frac{1}{4}$

10. $25^{\frac{1}{2x+2}} \cdot 5^{\frac{2}{x+2}} > 5^{\frac{3}{x+3}}$