ENCUENTRO # 33
TEMA: Exponenciales y Logaritmos

CONTENIDOS:

1. Ecuaciones Exponenciales.
   (a) Leyes de los Exponentes
   (b) Como resolver ecuaciones exponenciales

Ejercicio Reto

1. Si a y b las soluciones de $x^2 + 7x + 15 = 0$ ¿Cuánto vale $a^2 + b^2 + 12ab$?
   A)100 B)150 C)201 D)199 E)169

1. Introducción

Los Exponentes son una forma corta de representar multiplicaciones repetidas. Podemos encontrar fácilmente el valor de a^b al multiplicar a muchas veces. Por ejemplo, con cálculos numéricos,

$$2^2 \times 2^3 \times 2^4 = 4 \times 8 \times 16 = 512 = 2^9.$$

Sin embargo, este enfoque nos conducirá rápidamente a grandes cantidades, que introduce complicaciones. Las reglas de los exponentes nos ofrecen una forma de atajo a este proceso, y llegamos a la conclusión de que

$$2^2 \times 2^3 \times 2^4 = 2^{2+3+4} = 2^9.$$

Las ecuaciones que tienen la incógnita en el exponente se llaman ecuaciones exponenciales y su solución se obtiene al aplicar el siguiente método:

- Si el argumento o resultado se puede expresar como potencia de la base, sólo se igualan exponentes.

Para resolver Ecuaciones Exponenciales, necesitaremos considerar las Leyes de los exponentes ya que son la herramienta principal para su resolución.

Las Leyes de los Exponentes son:

Nombre de Regla	Regla
Producto de Potencias de igual base	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
	$a^n \times b^n = (a \times b)^n$
Cociente de Potencias de igual base	$a^n/a^m = a^{n-m}$
	$a^n/b^n = (a/b)^n$
Exponentes Negativos	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
Potencia de Potencia	$(a^n)^m = a^{n \times m}$
	$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
	$\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$
Torre de Exponentes	$a^{n^m} = a^{(n^m)}$
Elevar a Cero	$a^0 = 1$
	$0^a = 0$ para $a > 0$
Elevar a Uno	$a^1 = a$
	$1^a = 1$

Teorema 1. *Si a es una constante y $a^x = a^y \rightarrow x = y$; $a \neq 0$.*

Demostración. $a^x = a^y \rightarrow \frac{a^x}{a^y} = 1 \rightarrow a^{x-y} = 1 \rightarrow x - y = 0$
Por lo tanto, $x = y$.

□

Teorema 2. *Si $a \neq 0$ y $a^x = 0 \rightarrow x = \phi$.*

Como Resolver Ecuaciones Exponenciales

1. Transformar todas las bases de las potencias a una base común.
2. Aplicar las propiedades de las potencias para reducir la ecuación.
3. Usar el Teorema "Si a es una constante y $a^x = a^y \rightarrow x = y$; $a \neq 0$".
4. Resolver la ecuación obtenida.
5. Conjunto solución.

Ejemplo 1.1. *Encuentre el valor de x si $4^x = 16$*

Solución. Puesto que, $4^x = 16 \rightarrow 4^x = 4^2$
Por el teorema 1, concluimos que, $x = 2$.

Ejemplo 1.2. *Encuentre x si $6^x - 1 = 0$*

Solución. Puesto que, $6^x - 1 = 0 \rightarrow 6^x = 1 \rightarrow 6^x = 6^0$
Por el teorema 1, concluimos que, $x = 0$.

Ejemplo 1.3. *Encuentre x si* $(8)(9^x) = 9^x$

Solución. Puesto que, $(8)(9^x) = 9^x \rightarrow (8)(9^x) - 9^x = 0 \rightarrow (7)9^x = 0 \rightarrow 9^x = 0$
Por el teorema 1, concluimos que, $x = \phi$.

Ejemplo 1.4. *Determina el valor de x para el cual se cumple que:* $2^{x^2} = 4^2$

Solución. Primero hay que transformar la bases de as potencias a una base común.

$$2^{x^2} = (2^2)^2$$

Aplicar la propiedad de las potencia $([a^r]^s = a^{r \cdot s})$

$$2^{x^2} = 2^4$$

Aplicar la propiedad $(a^x = a^y \rightarrow x = y)$

$$2^{x^2} = 2^4 \rightarrow x^2 = 4$$

Resolver la ecuación obtenida

$$\begin{gathered} x^2 = 4 \\ x = \pm\sqrt{4} \\ x = \pm 2 \end{gathered}$$

Conjunto Solución: $S = \{x \in \mathbb{R} : x = -2 \wedge x = 2\}$

Ejemplo 1.5. *Halla los valores de $x \in \mathbb{R}$*

$$2^{x^2+3} \cdot 4^x = 64$$

Solución

$$\begin{gathered} 2^{x^2+3} \cdot 4^x = 64 \\ 2^{x^2+3} \cdot (2^2)^x = 2^6 \\ 2^{x^2+3} \cdot (2^2 x = 2^6 \\ 2^{x^2+3+2x} = 2^6 \\ x^2 + 3 + 2x = 6 \\ x^2 + 2x - 6 + 3 = 0 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \\ (x+3)(x-1) = 0 \\ x_1 = -3 \qquad x_2 = 1 \end{gathered}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x = -3 \wedge x = 1\}$$

Ejemplo 1.6. *Determina los valores de la variable para los cuales se cumple la siguiente igualdad:*

$$\left(5^{x-4}\right)^x = 25^x$$

Solución.

$$\begin{aligned}
(5^{x-4})^x &= 25^x \\
(5^{x-4})^x &= (5^2)^x \\
5^{x(x-4)} &= 5^{2x} \\
x(x-4) &= 2x \\
x^2 - 4x - 2x &= 0 \\
x^2 - 6x &= 0 \\
x(x-6) &= 0 \\
x_1 = 0 \qquad & x_2 = 6
\end{aligned}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x = 0 \wedge x = 6\}$$

Ejemplo 1.7. *Halla el conjunto solución de:*

$$49 \cdot 7^{\frac{x^2}{x-4}} = 1$$

Solución

$49 \cdot 7^{\frac{x^2}{x-4}} = 1$

$7^2 \cdot 7^{\frac{x^2}{x-4}} = 7^0$

$7^{2+\frac{x^2}{x-4}} = 7^0$

$2 + \frac{x^2}{x-4} = 0 / \cdot (x-4)$

$2(x-4) + x^2 = 0$

$2x - 8 + x^2 = 0$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x-2)(x+4) = 0$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -4$

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x = 2 \wedge x = -4\}$$

Ejemplo 1.8. *Resuelve la ecuación:* $4^{\sqrt{x^2-8}} \cdot 2^{x-1} = 4^2$

Solución

$(2^2)^{\sqrt{x^2-8}} \cdot 2^{x-1} = (2^2)^2$

$2^{2\sqrt{x^2-8}} \cdot 2^{x-1} = 2^4$

$2^{2\sqrt{x^2-8}+x-1} = 2^4$

$2\sqrt{x^2-8} + x - 1 = 4$

$2\sqrt{x^2-8} = 4 - x + 1$

$(2\sqrt{x^2-8})^2 = (5-x)^2$

$4(x^2-8) = 25 - 10 + x^2$

$4x^2 - 32 = 25 - 10x + x^2$

$4x^2 - 32 - x^2 + 10x - 25 = 0$

$3x^2 + 10x - 57 = 0$

$(x-3)(3x+19) = 0$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -\frac{19}{3}$

Hay que comprobar cual es la solución

Ejemplo 1.9. *Resuelve:*

$$3^{x+2} + 2 \cdot 3^x - 33 = 0$$

Solución. Para resolver la anterior ecuación, haremos uso de un cambio de variable

$$3^x = a,$$

Luego, la ecuación se transforma en:

$$\begin{aligned} 3^x \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^x - 33 &= 0 \\ a \cdot 9 + 2 \cdot a - 33 &= 0 \\ a(9+2) - 33 &= 0 \\ 11a = 33 \rightarrow a &= \frac{33}{11} = 3 \end{aligned}$$

Ahora regresando a nuestra variable original, tendremos:

$$\begin{aligned} a &= 3^x \\ 3 &= 3^x \rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $5^x = 625$
2. $9^{2x} = 9^0$
3. $64^x = 8$
4. $(2.4)^x = 5.76$
5. $5^{x-1} = 25$
6. $7^{3x-3} = 343$
7. $3^{2x+3} = 3$
8. $4^{x+1} = 16^{x-1}$
9. $(0.125)^x = 128$
10. $2^{3x+1} = 256$
11. $5^x = 625^{3+x}$
12. $49^{1-2x} = 7^x$
13. $25^{x-2} = 5^{1-x}$
14. $3^x = 243^{x-2}$
15. $2^{-(x+3)} = 32^x$
16. $3^{x^2} = 729$
17. $2^{x^2-2x} = 8$
18. $25^x + 5^{x+1} = 750$
19. $6^{2x+5} - 36 = 0$
20. $4^{x^2+3x} = \frac{1}{16}$
21. $$7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+1}$$
22. $2^{-2x} + 2^{-x} = 2$

Problemas Propuestos

1. Resuelve mediante un cambio de variable

   a) $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x} - 4 = 0$

   b) $3^{x} + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 11$

   c) $2^{x} + 2^{-x} = \frac{65}{8}$

2. Resuelve los siguientes sistemas:

   a) $\begin{cases} 2^{x}+2^{y}=5 \\ 2^{x+y}=8 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} 3^{x+y}=2187 \\ 3^{x-y}=27 \end{cases}$

3. Resuelve los siguientes sistemas:

   - $\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ 2^{x+y}=\frac{1}{2} \end{cases}$
   - $\begin{cases} 3^{x-1}-3^{-y}=\frac{2}{9} \\ 2x+y=2 \end{cases}$
   - $\begin{cases} 2^{\frac{x}{2}} \cdot 8^{y}=2 \\ 2^{x-y}=4 \end{cases}$
   - $\begin{cases} 2 \cdot 3^{x}+3^{y-2}=5 \\ 3^{x} \cdot 3^{y}=27 \end{cases}$

4. Encuentra el valor de x:

   a) $2^{x-1} + 2^{x} - 2^{x-1} = -4$

   b) $32^{x} = \sqrt[3]{2^{2}}$

   c) $3^{x-1} + \frac{1}{3} = 2 \cdot 3^{2x-1}$

5. Resuelve los siguientes sistemas:

   - $\begin{cases} x-y=1 \\ 2^{x}-2^{y}=2 \end{cases}$
   - $\begin{cases} 5^{x} \cdot 25^{2x}=5^{y+2} \\ 3^{2x} \cdot 3^{2y}=81^{2} \end{cases}$
   - $\begin{cases} 3^{x+1}-2^{y+1}=-3 \\ 2^{y}-2 \cdot 3^{x+2}=-4 \end{cases}$

6. Cuantos números enteros x satisfacen la ecuación $(x^{2} - x - 1)^{x+2} = 1$?
A) 3 B) 2 C) Ninguna de las opciones D) 4