ENCUENTRO # 32
TEMA: Funciones de variable real.

CONTENIDOS:

1. Función racional
2. Composición de funciones.
3. Operaciones con funciones.

Ejercicio Reto

1. Sabiendo que $a+b+c=0$, $ab+ac+bc=-7$ y $abc=-6$, entonces el valor de $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ es:
A)$\frac{18}{36}$ B)$\frac{29}{36}$ C)$\frac{49}{36}$ D)$\frac{7}{36}$ E)$\frac{36}{49}$
2. **Examen UNI 2015**: Sea $f(x)$ un función tal que $f(x+2)=x^2-6x+5$, entonces el valores de $f(0)$ es igual a:
A)-11 B)-3 C)0 D)5 E)21

1. Función racional

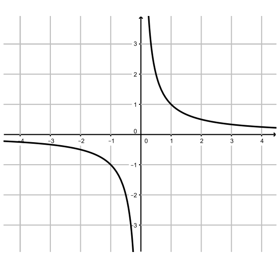
Diremos que si $g(x)$ y $h(x)$ son funciones polinomiales con $h\neq 0$ entonces llamaremos *función racional* al cociente:

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

Dado que en un cociente el denominador debe de ser distinto de cero, en estas funciones el dominio estará dado por: $Domf=\{x:x\in\mathbb{R}\wedge h(x)\neq 0\}$, y por tanto el conjunto de partida siempre se tendrá que definir.

Función de proporcionalidad inversa

$y=\frac{1}{x}$



1. Dominio: $x\in\mathbb{R}|x\neq 0$
2. Codominio: $y\in\mathbb{R}$
3. Recorrido: $y\in\mathbb{R}|y\neq 0$
$\rightarrow$ Asíntota vertical en $x=0$
$\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=0$

4. Monotonía: no es monótona, pero presenta intervalos de monotonía.
   Monotonía decreciente

5. Raíces
   $\frac{1}{x} = 0$ Imposible $\therefore$ no tiene ceros

6. Simetría:
   no es una función par porque:
   $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$
   $f(x) \neq f(-x)$
   es una función impar porque:
   $-f(x) = -\frac{1}{x}$
   $\therefore -f(x) = f(-x)$

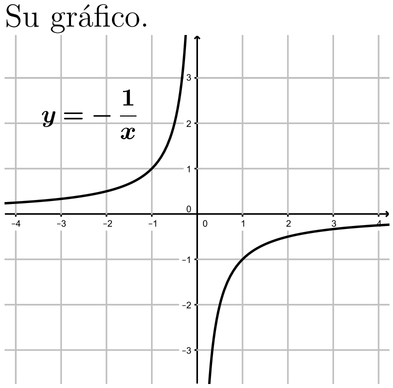
7. Es una función inyectiva en todo su dominio porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.

8. No es sobreyectiva porque el codominio no es igual al recorrido.

9. La función no es biyectiva porque no es inyectiva y no es sobreyectiva.

10. Valor Máximo: no tiene
    Valor mínino: no tiene.

Si la función fuera $y = -\frac{1}{x}$
Su gráfico.



1. Dominio: $x \in \mathbb{R} | x \neq 0$

2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$

3. Recorrido: $y \in \mathbb{R} | y \neq 0$
   $\rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 0$
   $\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 0$

4. Monotonía: no es monótona, pero presenta intervalos de monotonía.
   Intervalos de monotonía creciente

5. Raíces
   $-\frac{1}{x} = 0$ Imposible $\therefore$ no tiene ceros

6. Simetría:
   no es una función par porque:
   $f(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$
   $f(x) \neq f(-x)$
   es una función impar porque:
   $-f(x) = -(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$
   $\therefore -f(x) = f(-x)$

7. Es una función inyectiva en todo su dominio porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.

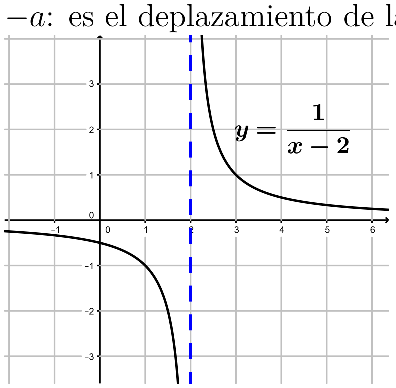
8. No es sobreyectiva porque el codominio no es igual al recorrido.

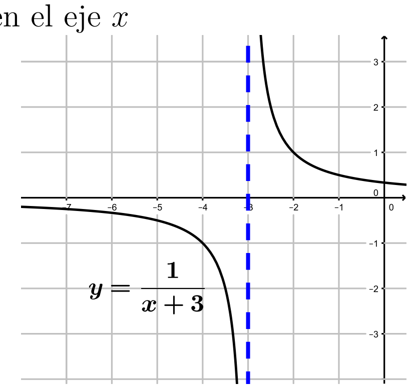
9. La función no es biyectiva porque no es inyectiva y no es sobreyectiva.

10. Valor Máximo: no tiene
    Valor mínino: no tiene.

Función de proporcionalidad inversa desplazada

$y = \frac{1}{x+a}$
$-a$: es el deplazamiento de la función en el eje x

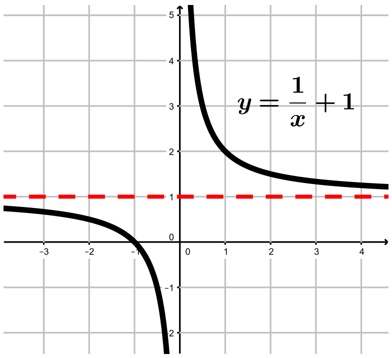




$\rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 2$
$\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 0$

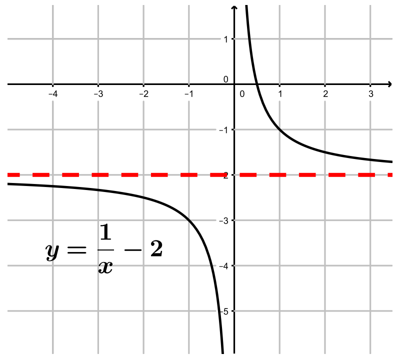
$\rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -3$
$\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 0$

$y = \frac{1}{x} + b$
b: es el deplazamiento de la función en el eje y



→ Asíntota vertical en $x = 0$

→ Asíntota horizontal en $y = 1$



→ Asíntota vertical en $x = 0$

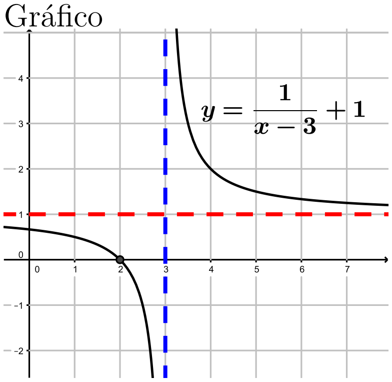
→ Asíntota horizontal en $y = -2$

Desplazamiento en ambos ejes

$y = \frac{1}{x+a} + b$

$y = \frac{1}{x-3} + 1$

Gráfico



1. Dominio: $x \in \mathbb{R} | x \neq 3$

2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$

3. Recorrido: $y \in \mathbb{R} | y \neq 1$
   → Asíntota vertical en $x = 3$
   → Asíntota horizontal en $y = 1$

4. Monotonía: no es monótona, pero presenta intervalos de monotonía.
   intervalos de monotonía decreciente

5. Raíces
   $\frac{1}{x-3} + 1 = 0$
   $\frac{1}{x-3} = -1$
   $1 = -(x-3)$
   $1 = -x + 3$
   $x = -1 + 3 = 2$

6. Simetría:
   no es una función par porque:
   $f(-x) = \frac{1}{-x-3} + 1 = -\frac{1}{x+3} + 1$
   $f(x) \neq f(-x)$
   no es una función impar porque:
   $-f(x) = -(\frac{1}{x-3} + 1) = -\frac{1}{x-3} - 1$

$\therefore -f(x) \neq f(-x)$

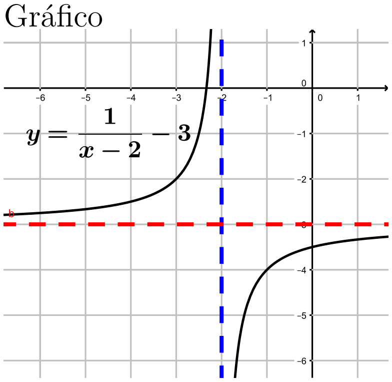
7. Es una función inyectiva en todo su dominio porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.

8. No es sobreyectiva porque el codominio no es igual a recorrido.

9. La función no es biyectiva porque no es inyectiva y no es sobreyectiva.

10. Valor Máximo: no tiene
    Valor mínino: no tiene.

$y = -\frac{1}{x+2} - 3$
Gráfico



1. Dominio: $x \in \mathbb{R} | x \neq -2$

2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$

3. Recorrido: $y \in \mathbb{R} | y \neq -3$
   $\rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$
   $\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = -3$

4. Monotonía: no es monótona, pero presenta intervalos de monotonía.
   intervalos de monotonía decreciente

5. Raíces
   $-\frac{1}{x+2} - 3 = 0$
   $-\frac{1}{x+2} = 3$
   $-1 = 3(x+2)$
   $-1 = 3x + 6$
   $-3x = 6 + 11$
   $x = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$

6. Simetría:
   no es una función par porque:
   $f(-x) = -\frac{1}{-x+2} - 3 = \frac{1}{x-2} - 3$
   $f(x) \neq f(-x)$
   no es una función impar porque:
   $-f(x) = -(-\frac{1}{x+2} - 3) = \frac{1}{x+2} - 3$
   $\therefore -f(x) \neq f(-x)$

7. Es un función inyectiva en todo su dominio porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.

8. No es sobreyectiva porque el codominio no es igual al recorrido.

9. La función no es biyectiva porque no es inyectiva y no es sobreyectiva.

10. Valor Máximo: no tiene
Valor mínino: no tiene.

Ejercicios Propuestos

1. $y = \frac{1}{x-3}$
2. $y = -\frac{1}{x+1}$
3. $y = -\frac{1}{x} + 2$
4. $y = \frac{1}{x} - 3$
5. $y = \frac{1}{x-2} + 3$
6. $y = -\frac{1}{x+1} - 2$
7. $y = \frac{1}{x+3} - 1$
8. $y = -\frac{1}{x-2} + 1$

2. Composición de funciones

Dadas dos funciones reales de variables reales, f y g, se llama composición de las funciones y se escribe gof, a la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, por $(gof)(x) = g[f(x)]$.
La función $(gof)(x) = g[f(x)]$ se lee g *compuesto con* f *aplicado a* x

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g[f(x)] \end{array}$$

Ejemplo # 1 Sea las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$.
Calcula $(gof)(x)$, $(fog)(x)$.
Solución

$$(gof)(x)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = x+3 & \longrightarrow & g[f(x)] = g(x+3) = (x+3)^2 \end{array}$$

$$(fog)(x)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & g(x) = x^2 & \longrightarrow & f[g(x)] = f(x^2) = x^2+3 \end{array}$$

Ejercicios propuestos

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Calcula $(fog)(x)$, $(gof)(x)$

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 1$
2. $f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{1}{x-3}$
3. $f(x) = |x - 2|$, $g(x) = x^3$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$, $g(x) = x^3$
5. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 4$
6. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x-6}$, $g(x) = \sqrt{x}$
7. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$
8. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $g(x) = x^3$
9. $f(x) = \sqrt{x+3}$, $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$
10. $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$
11. $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = \frac{x+3}{2x+1}$
12. $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$, $g(x) = \sqrt{x}$

Analizar el dominio de funciones

Ejemplo # 1 Analiza el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-3x+2}$$

Solución

En este caso esta es una función racional la cual el donominador tiene que ser diferente de cero.

$x^2 - 3x + 2 \neq 0$

$(x - 2)(x - 1) \neq 0$

$x - 2 \neq 0 \qquad x - 1 \neq 0$

$x \neq 2 \qquad x \neq 1$

Dominio $f(x) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2 \wedge x \neq 1\}$

Ejemplo # 2 Analiza el dominio de la siguiente función:

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

Solución

Este caso $g(x)$ es una función irracional de indice par por tanto la cantidad subradical tiene que ser mayor o igual que cero.

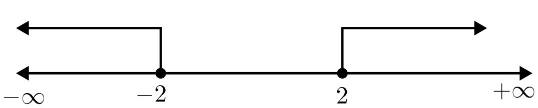
$$\sqrt{m} \qquad m \geq 0$$

$x^2 - 4 \geq 0$

$(x - 2)(x + 2) \geq 0$

$x - 2 = 0 \qquad x + 2 = 0$

$x = 2 \qquad x = -2$



Dominio $g(x) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2 \wedge x \geq 2\}$

Ejercicios propuestos Analiza el dominio de las siguientes funciones:

1. $y = \sqrt{x-4}$
2. $y = \frac{x}{x^2-x}$
3. $y = \sqrt{x^2-x-56}$
4. $y = \sqrt{x^2-14x+49}$
5. $y = \frac{x^2-4}{x^2-3x-10}$
6. $y = \frac{2x}{x^3-8}$
7. $y = \frac{x^2}{x^3-3x^2-40}$
8. $y = \sqrt[3]{x^2-4}$
9. $y = \sqrt{\frac{4x^2-6}{8x^2-6x-5}}$
10. $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-25}}$
11. $y = \sqrt[3]{\sqrt{x^2-4}}$
12. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2-5x}{3x^2-4x-7}}$

3. Operaciones con funciones

Sean f y g funciones A y B respectivamente con $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ entonces definimos las operaciones elementales como sigue:

1. Suma

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ Dom(f+g) = A \cap B$$

2. Resta

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),\ Dom(f-g) = A \cap B$$

3. Producto

$$(f \bullet g)(x) = f(x) \bullet g(x),\ Dom(f \bullet g) = A \cap B$$

4. Cociente

$$(\tfrac{f}{g})(x) = \tfrac{f(x)}{g(x)},\ Dom(\tfrac{f}{g}) = \{x \in (A \cap B) \wedge g(x) \neq 0\}$$

Ejemplo # 1 Dada las funciones $f(x)$ y $g(x)$, efectúa las operaciones indicadas y determina el dominio de la función resultante.

1. $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = 3x - 1$, Calcula $(f+g)(x)$
   Solución
   $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
   $\therefore f(x) + g(x) = \sqrt{x-3} + 3x - 1$
   Dominio $f(x) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$
   Dominio $g(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$
   $Dom(f+g) = Dom\ f(x) \cap Dom\ g(x) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$

2. $f(x) = \frac{x^4-3}{x^2-4}$, $g(x) = x^2$, Calcula $(f-g)(x)$
   Solución
   $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
   $\therefore f(x) - g(x) = \frac{x^4-3}{x^2-4} - x^2 = \frac{4x^2-3}{x^2-4}$
   Dominio $f(x) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -2 \wedge x \neq 2\}$
   Dominio $g(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$
   $Dom(f+g) = Dom\ f(x) \cap Dom\ g(x) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -2 \wedge x \neq 2\}$

3. $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x}$, Calcula $(f \bullet g)(x)$
   Solución
   $(f \bullet g)(x) = f(x) \bullet g(x)$
   $f(x) \bullet g(x) = \sqrt[3]{x-2} \bullet \sqrt{x} = \sqrt[6]{(x-3)^2} \bullet \sqrt[6]{x^3} = \sqrt[6]{x^3(x-2)^2}$
   $Dom\ f(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$
   $Dom\ g(x) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$
   $Dom(f \bullet g)(x) = Dom\ f(x) \cap Dom\ g(x) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$, $g(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-3x-28}$, Calcula $\frac{f(x)}{g(x)}$
   Solución
   $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
   $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x^2-25}}{\frac{x^2-4x}{x^2-3x-28}}$
   $Dom\ f(x) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -5 \wedge x \geq 5\}$
   $Dom\ g(x) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -4 \wedge x \neq 7\}$
   $g(x) \neq 0$, si $x^2 - 4x \neq 0$ si $x \neq 0$, $x \neq 4$
   $Dom(\frac{f}{g}) = \{x \in (Dom f(x) \cap Dom g(x)) \wedge g(x) \neq 0\}$
   $Dom \frac{f(x)}{g(x)} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -5 \vee x \geq 5 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 4 \wedge x \neq 7\}$

Ejercicios propuestos

Para cada par de funciones encontrar $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \bullet g(x)$, $f(x)/g(x)$, además dar $D_f, D_g, D_{f+g}, D_{f-g}, D_{f\bullet g}, D_{f/g}$

1. $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = 2x + 7$,
2. $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$, $g(x) = x^2$
3. $f(x) = \frac{1}{x+3}$, $g(x) = \frac{x+3}{x^2}$
4. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$, $g(x) = \frac{x+2}{x^2}$
5. $f(x) = x^{-1} + 2x^0$, $g(x) = x^{-2} - 2$
6. $f(x) = \frac{1}{x^2} - 2$, $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$
7. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, $g(x) = x + 1$
8. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$
9. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \sqrt{x}$
10. $f(x) = \sqrt{x+3}$, $g(x) = \frac{1}{x}$
11. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \sqrt{x+1}$
12. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$
13. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$
14. $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$
15. $f(x) = (x^2 + 1)^{3/2}$, $g(x) = x^{2/3} + 1$
16. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$