ENCUENTRO # 30
TEMA: Funciones de variable real.

CONTENIDOS:

1. Función valor absoluto (modular). Gráfica y propiedades.
2. Función cúbica. Gráfica y propiedades.
3. Función inversa.
4. Función raíz cuadrada.

Ejercicio Reto

1. **Examen UNI 2015**: Una caja mediana de madera pesa 2 libras más que la de tamaño pequeño. La de tamaño grande pesa 5 libras más que la pequeña. Si las tres cajas pesan a lo más 30 libras y si p representa el peso máximo de la caja pequeña, entonces la desigualdad que plantea el peso total de las tres cajas, es:
A)$p(p-2)(p-5) \leq 30$ B)$p+(p-2)+(p-5) \leq 30$ C)$p+(p+2)+(p+5) \leq 30$
D)$p+(p-2)+(p-5) \geq 30$ E)$p+(p+2)+(p+5) \geq 30$

2. **Examen UNI 2015**: El conjunto solución de la desigualdad $|x-5| \leq 2x+2$ es:
A)$[1,+\infty)$ B)$[-7,+\infty)$ C)$\left[-\frac{7}{3},+\infty\right)$ D)$\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$ E)$\mathbb{R}$

1. Función valor absoluto

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se definie como función valor absoluto a:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{si } x>0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

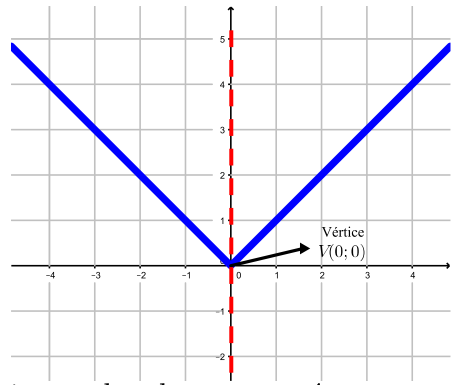
.

1. Dominio: $x \in \mathbb{R}$

2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$

3. Recorrido:$y \in \mathbb{R}[0; +\infty)$

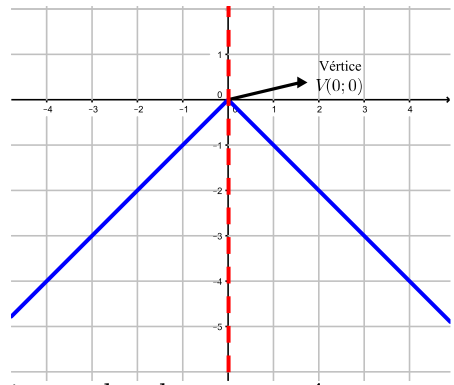
4. Eje de simetría $x = 0$



5. Monotonía: no es monótona, pero presenta intervalos de monotonía.
Monotonía decreciente: $x \leq 0$
Monotonía creciente: $x \geq 0$
6. Raíces
$|x| = 0$
$x = 0$
7. Simetría:
es una función par porque:
$f(-x) = |-x| = |x|$
no es una función impar porque:
$-f(x) = -|-x| = -|x|$
$\therefore -f(x) \neq f(-x)$
8. No es un función inyectiva en todo su dominio porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.
9. No es sobreyectiva porque el codominio no es igual a recorrido.
10. La función no es biyectiva porque no es inyectiva y no es sobreyectiva.
11. Valor Máximo: no tiene
Valor mínino: $y = 0$
En el caso de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que: $f(x) = -|x|$
Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se definie como función valor absoluto a:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

.



1. Dominio: $x \in \mathbb{R}$
2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$
3. Recorrido:$y \in \mathbb{R}(-\infty; 0]$
4. Eje de simetría $x = 0$

5. Monotonía: no es monótona, pero presenta intervalos de monotonía.
Monotonía decreciente: $x \leq 0$
Monotonía creciente: $x \geq 0$
6. Raíces
$-|x| = 0$
$x = 0$
7. Simetría:
es una función par porque:
$f(-x) = |-x| = |x|$
no es una función impar porque:
$-f(x) = -|-x| = -|x|$
$\therefore -f(x) \neq f(-x)$
8. No es un función inyectiva en todo su dominio porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.
9. No es sobreyectiva porque el codominio no es igual a recorrido.
10. La función no es biyectiva porque no es inyectiva y no es sobreyectiva.
11. Valor Máximo: $y = 0$
Valor mínino: no tiene

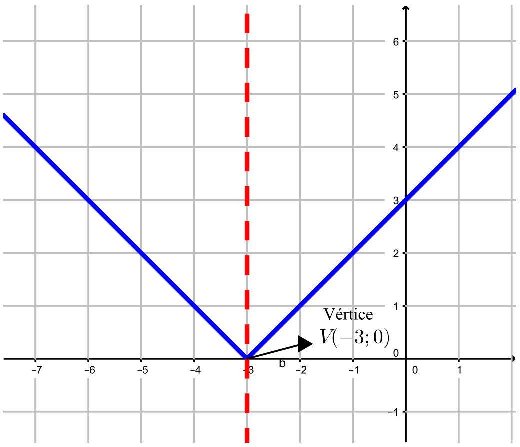
Función valor absoluto desplazada

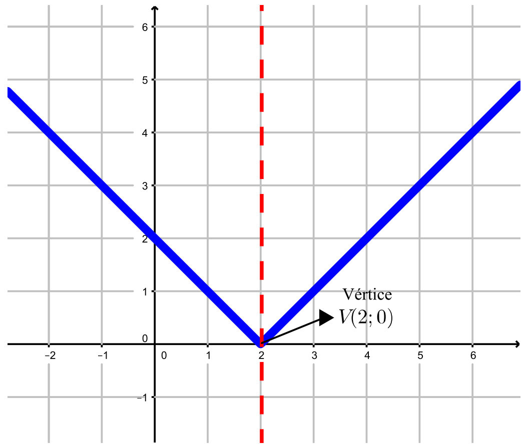
$$y = |x + a| + b$$
$$V(-a, b)$$

$-a$: es el deplazamiento de la función en el eje x.

Ejemplo # 1

$y = |x+3|$ $\qquad\qquad$ $y = |x-2|$

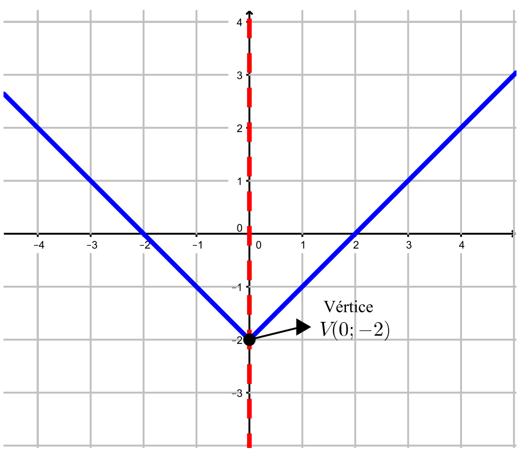


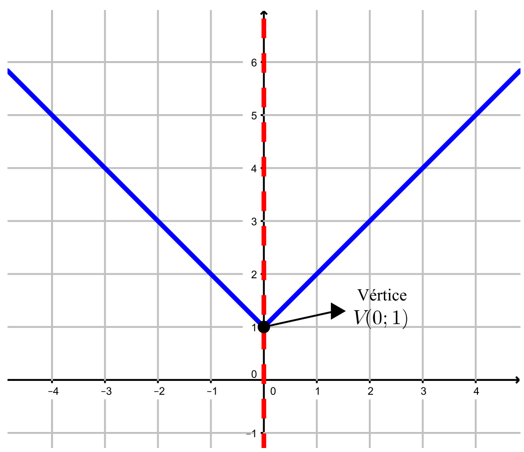


b: es el deplazamiento de la función en el eje y.

Ejemplo # 2

$y = |x| - 2$ $\qquad\qquad$ $y = |x| + 1$

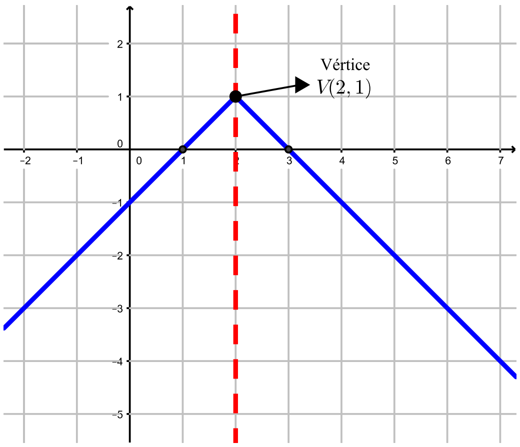


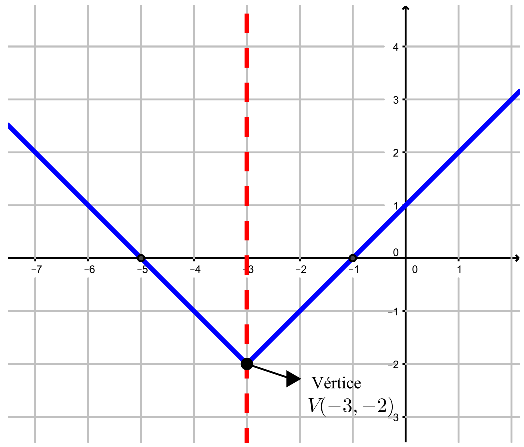


bf función valor absoluto con desplazamiento en ambo ejes

Ejemplo # 3

$y = -|x-2|+1$ $\qquad$ $y = |x-3|-2$





Propiedade las función valor absoluto desplazada

Ejemplo #4

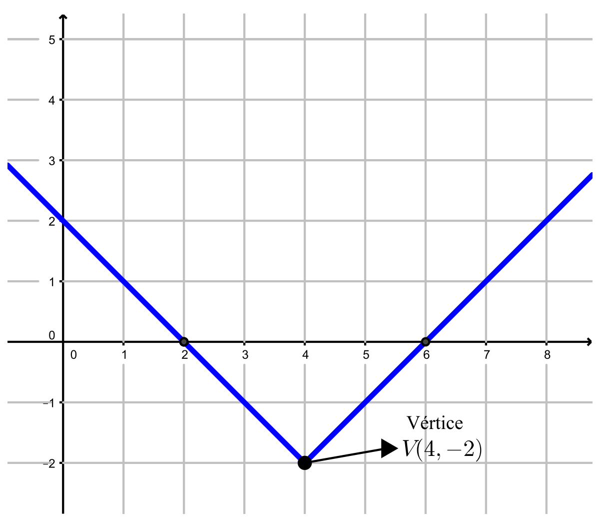
Sea la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que $g(x)=|x-4|-2$. Gráficala y analiza sus propiedades.

Solución

Pasos para representar la función.

1. Determinar el vértice.
   $V(4;-2)$

2. Hallar las raíces. de la función.
   $|x-4|-2=0$
   como el valor absoluto puede se positvo o negativo hay que tomar en cuenta las dos opciones en la ecuación:
   • Raíz positiva
   $+(x-4)-2=0$
   $x-4-2=0$
   $x=6$
   • Raíz negativa
   $-(x-4)-2=0$
   $-x+4-2=0$
   $x=2$



1. Dominio: $x \in \mathbb{R}$
2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$
3. Recorrido:$y \in \mathbb{R}[4; +\infty)$
4. Eje de simetría $x = 4$
5. Monotonía: no es monótona, pero presenta intervalos de monotonía.
   Monotonía decreciente: $x \leq 4$
   Monotonía creciente: $x \geq 4$
6. Raíces
   $x = 6$
   $x = 2$
7. Simetría:
   no es una función par porque:
   $f(-x) = |-x-4| - 2 = |x+4| - 2$
   $\therefore f(x) \neq f(-x)$
   no es una función impar porque:
   $-f(x) = -(|x-4| - 2) = -|x-4| + 2$
   $\therefore -f(x) \neq f(-x)$
8. No es un función inyectiva en todo su dominio porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en mas de un punto.
9. No es sobreyectiva porque el codominio no es igual a recorrido.
10. La función no es biyectiva porque no es inyectiva y no es sobreyectiva.
11. Valor Máximo: no tiene
    Valor mínino: $y = -2$

Ejercicios propuestos.

Dada las funciones de$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gráficalas y analiza sus propiedades.

1. $y = |x| - 3$
2. $y = -|x| - 2$
3. $y = |x-4|$
4. $y = -|x-1|$
5. $y = |x+2| - 5$
6. $y = |2x-1| - 1$
7. $y = |3x-4| + 1$
8. $y = -|5x-2| - 3$
9. $y = |3-x| - 4$
10. $y = |2-x|$
11. $y = |x-3| + 4$
12. $y = -|x-4| - 2$

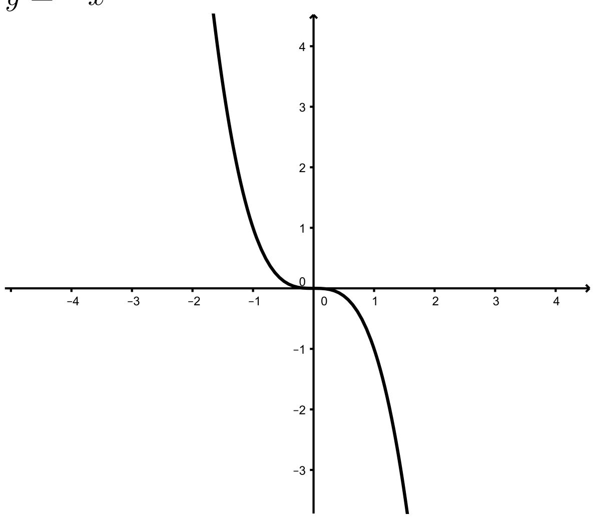
3. Funcción cúbica

Definición Si $a, b, c, d \in \diagdown$ con $a \neq 0$ se llama función cúbica a la función de la forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

A esta forma de escribir la función cúbica se le conoce como forma general de la ecuación cúbica.
Analisimos la forma más simple de esta función.

$y = -x^3$

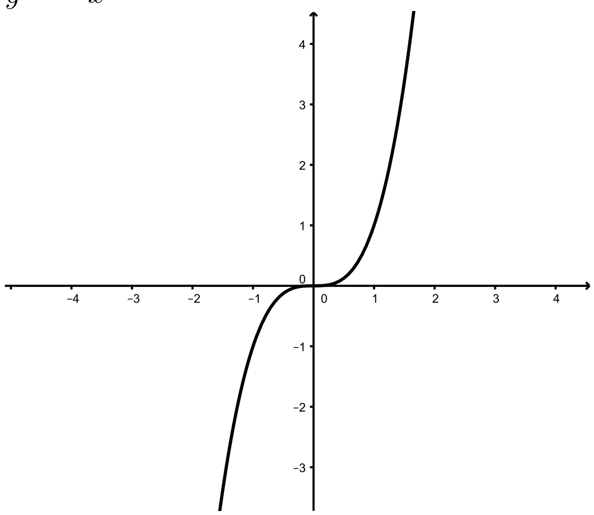


1. Dominio: $x \in \mathbb{R}$
2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$
3. Recorrido:$y \in \mathbb{R}$
4. Monotonía: es monótona creciente
5. Raíces
   $x = 0$
6. Simetría:
   no es una función par porque:
   $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$
   $\therefore f(x) \neq f(-x)$
   es una función impar porque:
   $-f(x) = -(x^3) = -x^3$
   $\therefore -f(x) = f(-x)$

6. Es un función inyectiva en todo su dominio porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.
7. Es sobreyectiva porque el codominio es igual a recorrido.
8. La función es biyectiva porque es inyectiva y es sobreyectiva.
9. Valor Máximo: no tiene
   Valor mínino: no tiene

Si la función fuera: $y = -x^3$.

$y = -x^3$



1. Dominio: $x \in \mathbb{R}$
2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$
3. Recorrido:$y \in \mathbb{R}$
4. Monotonía: es monótona decreciente
5. Raíces
   $x = 0$
6. Simetría:
   no es una función par porque:
   $f(-x) = -(-x)^3 = x^3$
   $\therefore f(x) \neq f(-x)$
   es una función impar porque:
   $-f(x) = -(-x^3) = x^3$
   $\therefore -f(x) = f(-x)$

6. Es un función inyectiva en todo su dominio porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.
7. Es sobreyectiva porque el codominio es igual a recorrido.
8. La función es biyectiva porque es inyectiva y es sobreyectiva.
9. Valor Máximo: no tiene
   Valor mínino: no tiene

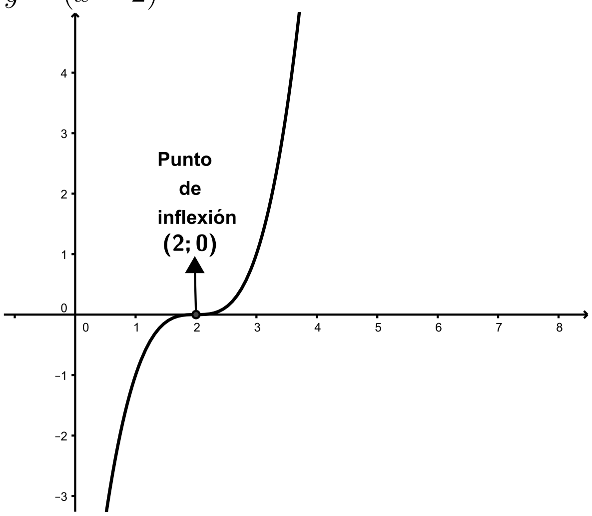
Función cúbica desplazada

$$y = (x+a)^3 + b$$
$$\text{Punto de inflexiión } (-a; b)$$

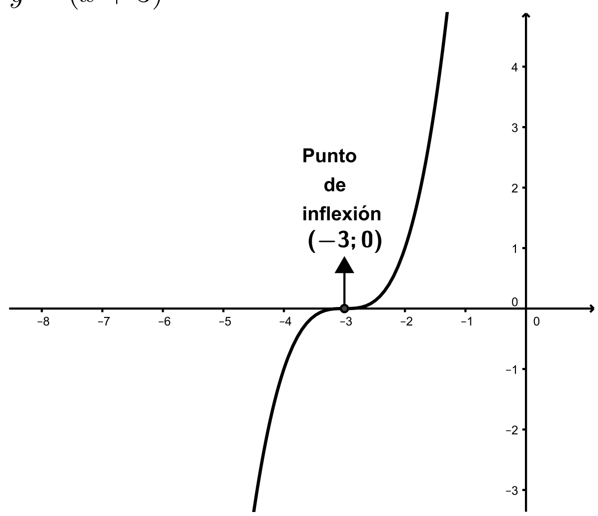
$-a$: es deplazamiento de la función en el eje x.

<u>Ejemplos# 1</u>

$y = (x-2)^3$



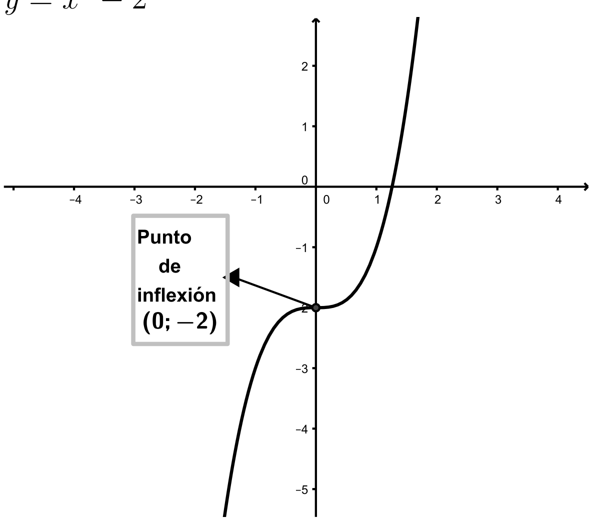
$y = (x+3)^3$



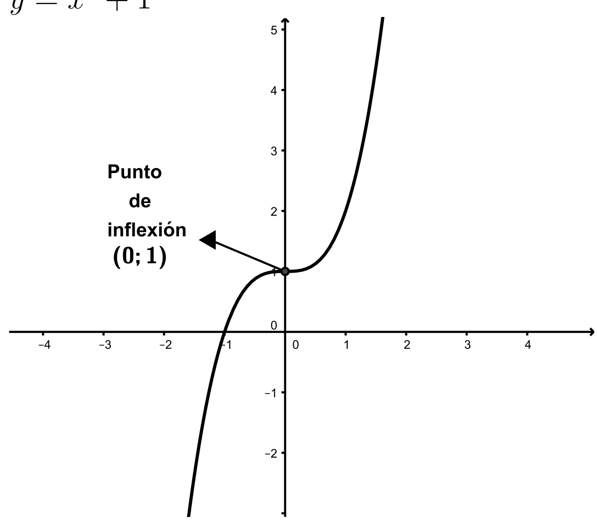
b: es deplazamiento de la función en el eje y.

<u>Ejemplos# 2</u>

$y = x^3 - 2$



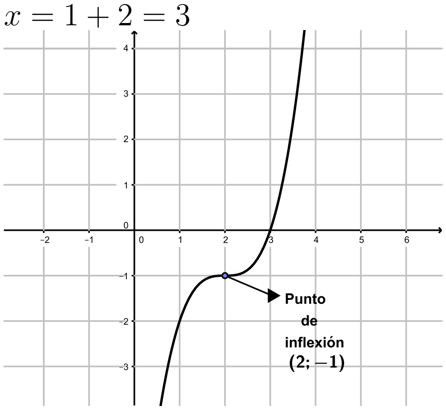
$y = x^3 + 1$



Analisis de las propiedades de un función cúbica desplazada en ambos ejes
Ejemplos #3 Sea la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = (x-2)^3 - 1$. Gráficala y analiza sus propiedades.

Solución

Punto de inflexión:$(2; -1)$
Raíz de la función:
$(x-2)^3 - 1 = 0$
$(x-2)^3 = 1$
$x - 2 = \sqrt[3]{1}$
$x - 2 = 1$
$x = 1 + 2 = 3$



1. Dominio: $x \in \mathbb{R}$
2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$
3. Recorrido:$y \in \mathbb{R}$
4. Monotonía: es monótona decreciente
5. Raíces
   $x = 3$
6. Simetría:
   no es una función par porque:
   $f(-x) = (-x-2)^3 - 1 = (x+2)^3 - 1$
   $\therefore f(x) \neq f(-x)$
   no es una función impar porque:
   $-f(x) = -[(x^3-2)-1] = (x^3-2)+1$
   $\therefore -f(x) \neq f(-x)$

6. Es un función inyectiva en todo su dominio porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.
7. Es sobreyectiva porque el codominio es igual a recorrido.
8. La función es biyectiva porque es inyectiva y es sobreyectiva.
9. Valor Máximo: no tiene
   Valor mínino: no tiene

Ejercicios propuestos

Dada las funciones de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gráficalas y analiza sus propiedades.

1. $y = x^3 - 1$
2. $y = x^3 + 2$
3. $y = -x^3 + 1$
4. $y = (x+3)^3$
5. $y = (x-4)^3$
6. $y = -(x-5)^3$
7. $y = -(x+7)^3$
8. $y = (x-3)^3 + 1$
9. $y = (x-5)^3 + 8$
10. $y = (x+1)^3 - 1$
11. $y = (2-x)^3 - 1$
12. $y = -(1-x)^{+}2$