ENCUENTRO # 29
TEMA: Funciones de variable real.

CONTENIDOS:

1. Definición de funciones
2. Función lineal. Gráfica y propiedades.
3. Función cuadrática. Gráfica y propiedades.

Ejercicio Reto

1. El valor numérico de $(1+\sqrt{2})^{2013}(1-\sqrt{2})^{2014}$ es de:
   A)-1 B)$\sqrt{2}-1$ C)$1+\sqrt{2}$ D)$1-\sqrt{2}$ E)$5+4\sqrt{2}$

2. Si (x,y) es la solución del sistema

$$\begin{cases} xy = 7 \\ xy^2 - x^2y - y + x = 54 \end{cases}$$

   , entonces x^2+y^2 es igual a:
   A)50 B)67 C)81 D)95 E)117

1. Definición de funciones

Definición
Una función es una regla que relaciona los elementos de dos conjuntos, es decir a todos los elementos de un conjunto inicial que llamaremos *dominio* le asigna por medio de una regla, uno y solo uno de los elementos de un conjunto final que llamaremos *Codominio*, al elemento inicial se le conoce como *Preimagen* y el elemento que se le asigna a través de la función como *Imagen*.
Definición
Una relación f de A en B es una **función** si:

1. $\text{Dom}f = A$.
2. Si $(a,b) \in f$ y $(a,c) \in f$, entoces $b = c$.

y se donotará a la función por: $f : A \longrightarrow B$. Además si el par ordenado $(x, y) \in f$ se inscribirá $y = f(x)$, y se leerá y igual a f de x.
Generalmente la noción de funciones es usada dando entender que el valor del segundo elemento depende del valor del primer elemento, en nuestro caso el valor y depende del valor de x. Por tanto se conoce comúnmente a x como variable independiente y a y como variable dependiente.
Definición El conjunto formado por todas las imágines de una función es conocido como *Recorrido*. El recorrido de una función es un subconjunto del codominio de la misma.

Representación de funciones

1. Representación en forma de conjunto

En esta se escriben todos los pares ordenados de la relación que forman la función. Existen dos formas de representar estos pares ordenados que son por extensión o por comprensión de conjuntos.

Definición según pares ordenados
Una función $f : X \longrightarrow Y$ es un conjunto de pares ordenados (x, y) tal que cada $x \in X$ aparece como la primera cordenada de un solo par ordenado.
Ejemplo # 1
De los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, una función de estos conjuntos sería:

$$f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$$

Sin embargo la siguiente relación no es una función:

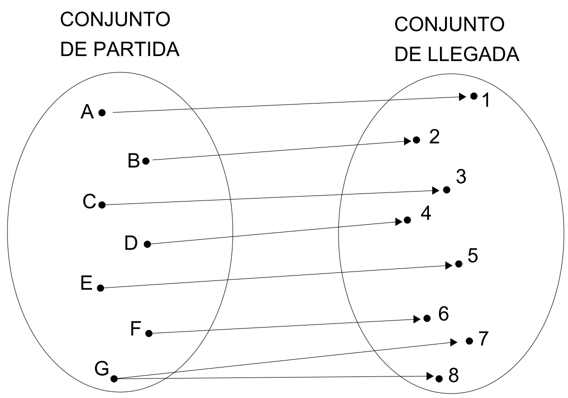
$$B = \{(1, a)(1, b)\}$$

Sí $A = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 9\}$ y B se tendrá el siguiente conjunto es una función:

$$f_2 = \{(x, y)/x \text{ es un dígito} \wedge y = x + 1\}$$

2. Mediante un diagrama sagital

Otra forma de representar relaciones (funciones) es mediante un diagrama sagital(o diagrama de Venn) en el cual mediante una flecha se unen los elementos que forman los pares ordenados.
Ejemplo # 2
Si $\omega = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ y $\theta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y si
$R_1 = \{(A, 1), (B, 2), (C, 3), (D, 4)(E, 5), (F, 6), (G, 7), (G, 8), \}$ es una relación de A en B su representación sería la que se muestra en el siguiente diagrama:



$\therefore$ esta relación no es una función.

Mediante tablas

Ejemplos # 3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Forma Análitica

Una de las formas más generales de representar una función es en forma analítica, esta consiste en representar una función por medio de una expresión matemática. Hay que tener en cuenta que se debe tener un dominio bien definido.

Ejemplo # 4

- $f(x) = x + 1$
- $g(x) = x^2 - x$
- $h(x) = e^x$
- $j(x) = \cos x$

5. Representación gráfica

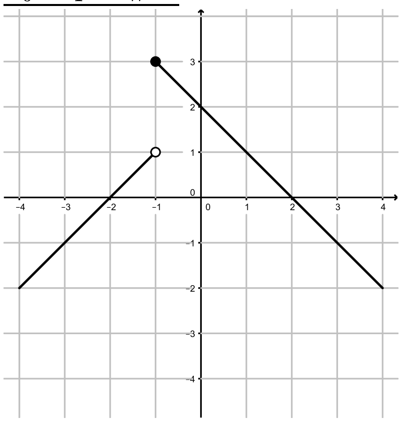
Esta forma de representar las funciones es usada con algún otro tipo de representación de funciones, aunque no quiere decir que la representación de ella sola, no sea suficiente.

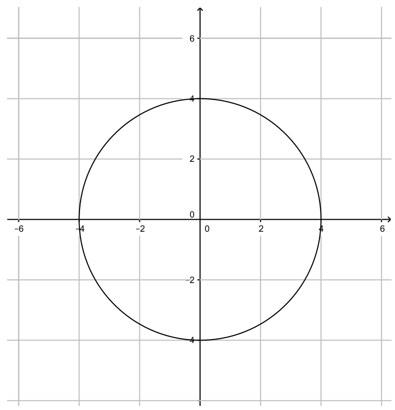
Definición:

La gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ para x en el dominio de f.

La regla más usada para reconocer cuando una gráfica es una función es la *regla de la recta vertical*. Esta consiste en trazar una recta vertical, paralela al eje y (variable dependiente), de tal manera que la recta corte en un solo punto a la gráfica, entonces diremos que la gráfica representa una función.

<u>Ejemplo # 5</u>





2. Función lineal

Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, entonces se llamará función lineal a la función:

$f(x) = ax + b$

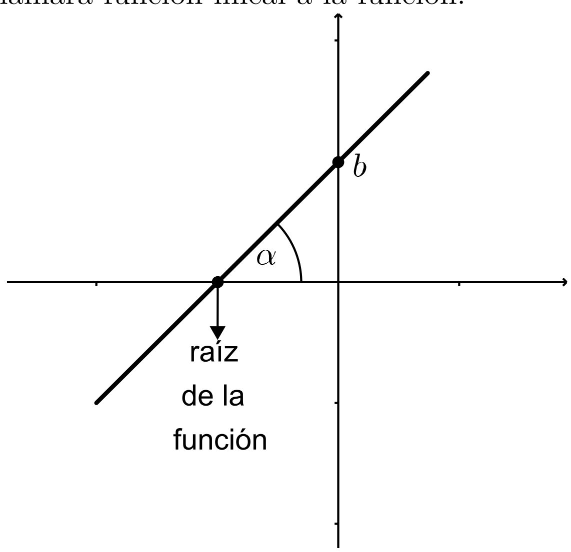
a: es la pendiente de la función

Si $a > 0$ la monotonía es crecientes.

Si $a < 0$ la monotonía es decrecientes.

Si $a = 0$ presenta una monotonía constante.

b: es el intercepto de la función con el eje y.



¿Cómo graficar una función lineal?

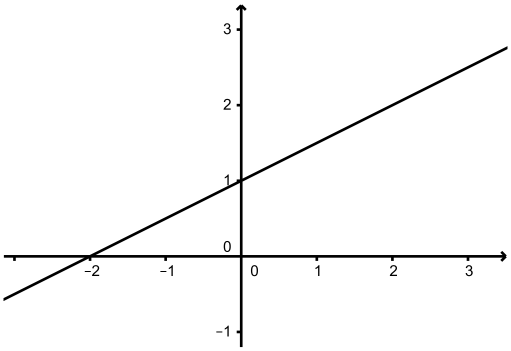
1. Tabla de valores

<u>Ejemplo # 1</u>

Gráfica la siguiente función: $y = \frac{1}{2}x + 1$

En este caso se le asigna valores a la variable independiente (x) y se obtiene los valores de la variable dependiente (y).

x	-2	4
$y = \frac{1}{2}x + 1$	0	3



2. Hallar los interceptos con lo ejes cordenados

El intercepto con el eje y es el valor de b.

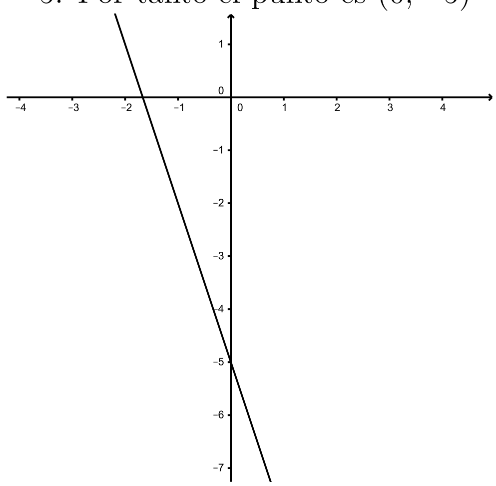
El intercepto con el eje x es la raíz de la ecuación cuando la $y = 0$.

Ejemplo # 2

Gráfica la siguiente función $f(x) = -3x - 5$.

Intercepto con el eje y es en $b = -5$. Por tanto el punto es $(0; -5)$

Intercepto en le eje x:
$-3x - 5 = 0$
$-3x = 5$
$x = -\frac{5}{3}$
Por tanto el el punto es $(-\frac{5}{3}; 0)$



3. Punto - pendiente

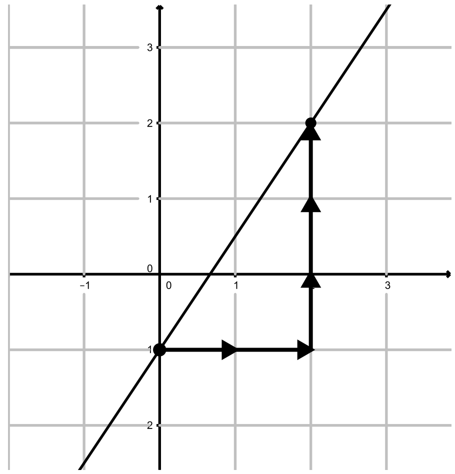
Para graficar una función lineal a través de esta forma debemos recordar la fórmula para calcular la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se toma como referencia el intercepto de la función con el eje y y se realiza el desplazamiento horizontal de q unidades a la derecha según el valor de la variación de las x que hay en el valor de la pendiente y desde la ubicación obtenida se desarrolla un desplazamiento vertical de p según la variación de las y que hay en valor de la pendiente.(hacia arriba del punto si el valor de la variación es positivo y hacia abajo si el valor de la variación es negativo), una vez desarrollado este proceso tendremos la ubicación de dos puntos y solo nos resta trazar el gráfico.

Ejemplos # 3

Gráfica mediante a través de la técnica punto pendiente la función $y = \frac{3}{2}x - 1$



Ejercicios Propuestos

Representa en un plano cartesiano las siguientes funciones.

1. $y = 2x - 3$
2. $y = -3x + 2$
3. $y = x - 5$
4. $2x - y = 1$
5. $y = -\frac{2}{3}x - 2$
6. $y = \frac{5}{2}x + 4$
7. $\frac{3}{4}x + y = \frac{1}{2}$
8. $3x - 4y = 2$
9. $-5x - 2y = 1$
10. $-4x - y = \frac{3}{2}$

Analisis de propiedades en las funciones lineales.

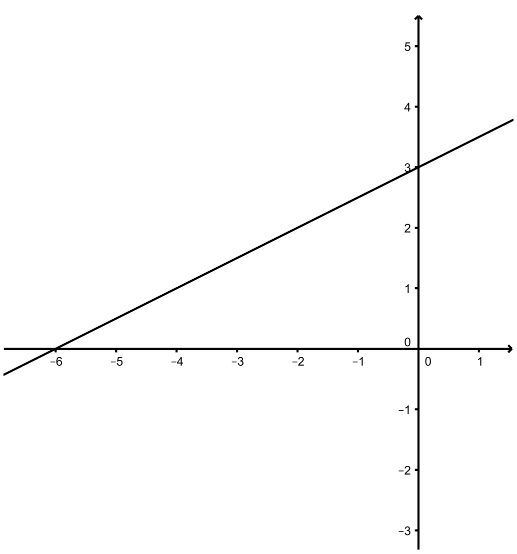
Propiedades de las funciones:

1. *Dominio*: es el conjunto de valores admisibles que puede tomar la variable independiente (x).
2. *Codominio*: es el conjunto de valores admisibles que puede tomar la variable dependiente (y).
3. *Recorrido*: es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente(y), según la relación matemática que tiene con la variable independiente
4. *Monotonía*: es determinar el comportamiento de los valores de la variable dependiente mientras aumentan los valores de la variable independiente

5. *Raíces*: son los interceptos de la función con el eje de las abscisas(eje x).
6. *Simetría*:
   - Función par: es cuando una función es simétrica respecto al eje de las ordenadas (y) y se cumple que: $f(x) = f(-x)$
   - Función impar es cuando una función es simétrica respecto al origen de coordenadas $O(0;0)$y se cumple que: $-f(x) = f(-x)$.
7. *Inyectividad*: Las funciones inyectivas (uno a uno) son aquellas en que ningún elemento del recorrido es imagen de más de un elemento del dominio, es decir, no existen dos o más pre imágenes que vayan a dar a la misma imagen. Se demuestra mediante una recta paralela el eje x si esta corta la gráfico de la función en un solo punto entonces la función es inyectiva.
8. *Sobreyectividad*: una función es biyectiva si está aplicada sobre todo el codominio, es decir, cuando cada elemento de y es la imagen de como mínimo un elemento de x. Formalmente sería: $\forall y \in Y \quad \exists x \in X : f(x) = y$
9. *Biyectividad*: Una función en biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejemplo # 1 Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$. Gráfica la función y analiza sus propiedades.

Solución



1. Dominio: $x \in \mathbb{R}$
2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$
3. Recorrido:$y \in \mathbb{R}$
4. Monotonía: Creciente porque $m > 0$.
5. Raíces $\frac{1}{2}x + 3 = 0$
   $\frac{1}{2}x = -3$
   $x = -3 \div \frac{1}{2}$
   $x = -3 \bullet \frac{2}{1} = -6$
6. Simetría: no es una función par porque: $f(-x) = \frac{1}{2}(-x)+3 = -\frac{1}{2}x+3$
   $\therefore f(x) \neq f(-x)$
   no es una función impar porque:
   $-f(x) = -\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = -\frac{1}{2}x - 3$
   $\therefore -f(x) \neq f(-x)$

7. Es un función inyectiva porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.

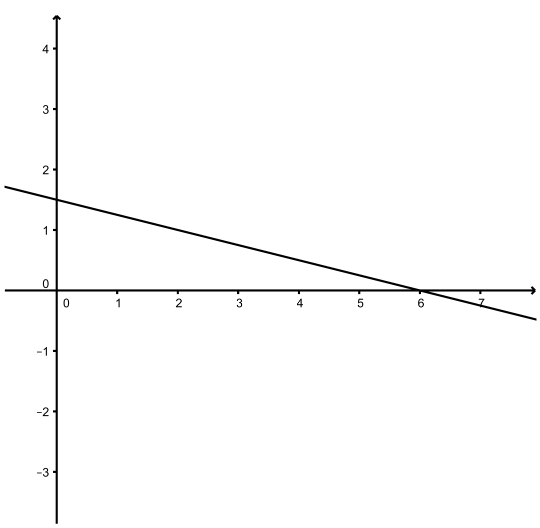
8. Es sobreyectiva porque el codominio es igual a recorrido.

9. La función e biyectiva porque es inyectiva y sobreyectiva

Ejemplo # 2

Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$. Gráfica la función y analiza sus propiedades.

Solución



1. Dominio: $x \in \mathbb{R}$

2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$

3. Recorrido:$y \in \mathbb{R}$

4. Monotonía: Decreciente porque $m < 0$.

5. Raíces $-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} = 0$
   $-\frac{1}{4}x = -\frac{3}{2}$
   $x = -\frac{3}{2} \div -\frac{1}{4}$
   $x = -\frac{3}{\cancel{2}} \bullet -\frac{\cancel{4}}{1} = 6$

6. Simetría: no es una función par porque:
   $f(-x) = -\frac{1}{4}(-x) + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}(x) + \frac{3}{2}$
   $\therefore f(x) \neq f(-x)$
   no es una función impar porque:
   $-f(x) = -\left(-\frac{1}{4}(x) + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}(x) - \frac{3}{2}$
   $\therefore -f(x) \neq f(-x)$

7. Es un función inyectiva porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.

8. Es sobreyectiva porque el codominio es igual a recorrido.

9. La función es biyectiva porque es inyectiva y sobreyectiva

Ejercicios Propuestos

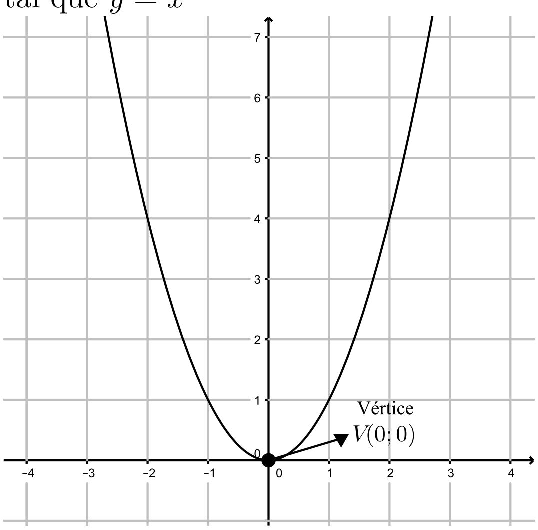
Dada las funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gráficalas y analiza sus propiedades.

1. $y = x$
2. $y = -x$
3. $y = -3x + 2$
4. $y = -x - 4$
5. $f(x) = x + 5$
6. $g(x) = -4x - 1$
7. $y = \frac{1}{2}x$
8. $y = \frac{3}{2}x - 3$
9. $h(x) = -\frac{1}{2}x - 2$
10. $j(x) = -4x - \frac{1}{4}$
11. $y = 4$
12. $y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5}$
13. $y = \frac{3}{4}x + 6$
14. $y = -\frac{5}{4}$
15. $y = 6x$

4. Función cuadrática

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, llamamos función cuadrática a la función de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
tal que $y = x^2$



Propiedades

1. Dominio: $x \in \mathbb{R}$
2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$
3. Recorrido:$y \in \mathbb{R} y \geq 0$
4. Eje de simetría $x = 0$
5. Monotonía: no es monótona, pero presenta intervalos de monotonía.
   Monotonía decreciente: $x \leq 0$
   Monotonía creciente: $x \geq 0$

6 Raíces $x^2 = 0$
   $x = 0$

7. Simetría: es una función par porque:
   $f(-x) = (-x)^2 = x^2$
   $\therefore f(x) = f(-x)$ no es una función impar porque:

$-f(x) = -x^2$
$\therefore -f(x) \neq f(-x)$

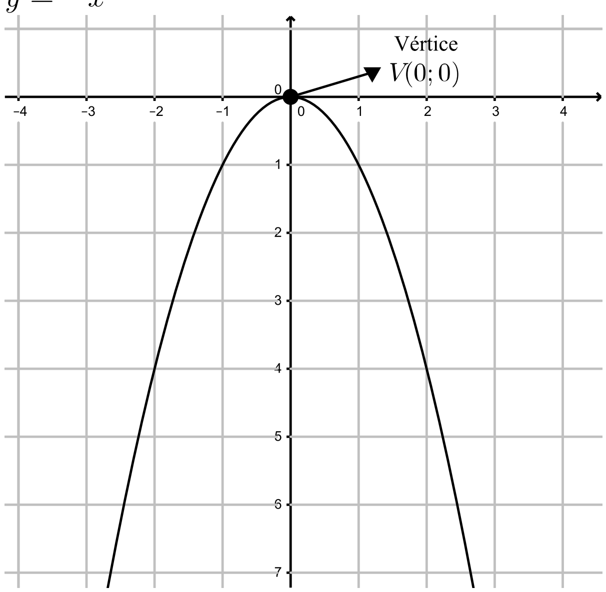
8. No es un función inyectiva en todo su dominio porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.

9. No es sobreyectiva porque el codominio no es igual a recorrido.

10. La función no es biyectiva porque no es inyectiva y no es sobreyectiva.

11. Valor Máximo: no tiene
    Valor mínino: $y = 0$

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que
$y = -x^2$



Propiedades

1. Dominio: $x \in \mathbb{R}$

2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$

3. Recorrido:$y \in \mathbb{R} y \leq 0$

4. Eje de simetría $x = 0$

5. Monotonía: no es monótona, pero presenta intervalos de monotonía.
   Monotonía decreciente: $x \geq 0$
   Monotonía creciente: $x \leq 0$

6. Raíces
   $x^2 = 0$
   $x = 0$

7. Simetría: es una función par porque:
   $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2$
   $\therefore f(x) = f(-x)$ no es una función impar porque:
   $-f(x) = -(-x^2) = x^2$
   $\therefore -f(x) \neq f(-x)$

8. No es un función inyectiva en todo su dominio porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.

9. No es sobreyectiva porque el codominio no es igual a recorrido.

10. La función no es biyectiva porque no es inyectiva y no es sobreyectiva.

11. Valor Máximo: $y = 0$
    Valor mínino: no tiene

Función de la forma $y = ax^2 + bx + c$

a	$a \geq 1$	ocurre una dilatación del gráfico.
	$0 < a < 1$	ocurre un contración del gráfico
	$a < 0$	ocurre una reflexión del gráfico
b	$b > 0$	el vértice se ubica al lado izquierdo del eje y
	$b < 0$	el vértice se ubica al lado derecho del eje y
	$b = 0$	el vértice se ubica sobre el eje y

c es el valor de y donde el gráfico de la función corta al eje de las ordenadas.

¿Cómo se representa una función cuadrática?

1. Se halla el vértice de la función.
   $V(x_v; y_v)$
   $x_v = \frac{-b}{2a}$
   y_v se calcula sustituyendo el valor de x_v en la función.
   $y_v = a(x_v)^2 + b(x_v) + c$

2. Se halla las raíces (estas son los interceptos del gráfico con el eje x).

3. Se ubica el punto de intercepción con el eje y.

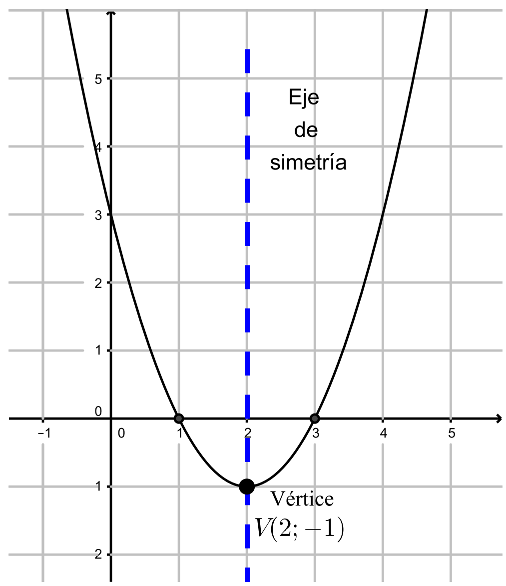
Ejemplo # 1 Esboza el gráfico de la función:$y = x^2 - 4x + 3$.

Solución

1. Hallamos el vértice, los valores de a, b, c son
   $a = 1, b = -4, c = 3$
   $x_v = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$
   $y_v = (2)^2 - 4(2) + 3$
   $= 4 - 8 + 3 = -1$
   $\therefore$ el vértice es $V(2; -1)$

2. Hallamos las raíces
   $x^2 - 4x + 3 = 0$
   $(x-3)(x-1) = 0$
   $x_1 = 3 \qquad x_2 = 1$

3. El intercepto que el eje y es en $y = 3$.



Ejemplo # 2

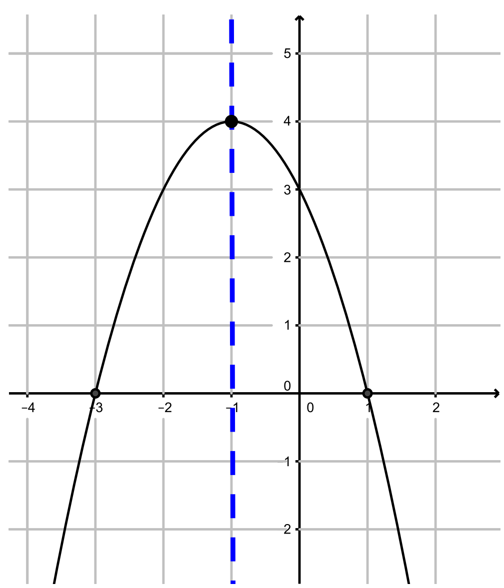
Esboza el gráfico de la función:$y = -x^2 - 2x + 3$.

Solución

1. Hallamos el vértice, los valores de a, b, c son
   $a = -1, b = -2, c = 3$
   $x_v = \frac{-(-2)}{2(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$
   $y_v = -(-1)^2 - 2(-1) + 3$
   $= -1 + 2 + 3 = 4$
   $\therefore$ el vértice es $V(-1; 4)$

2. Hallamos las raíces
   $-x^2 - 2x + 3 = 0 / \bullet (-1)$
   $x^2 + 2x - 3 = 0$
   $(x+3)(x-1) = 0$
   $x_1 = -3 \qquad x_2 = 1$

3. El intercepto que el eje y es en $y = 3$.



Análisis de la propiedades de una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$

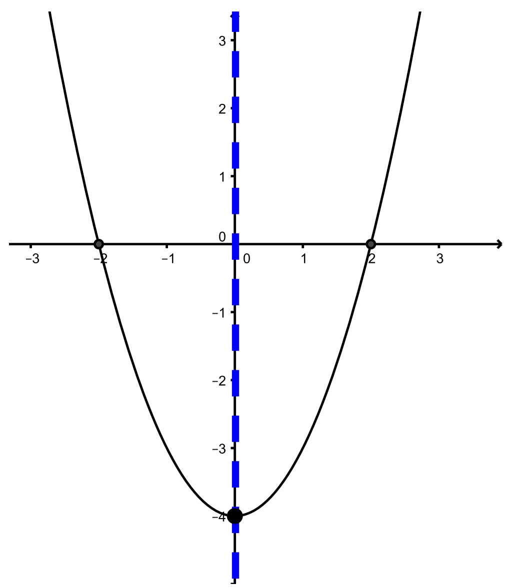
Ejemplo # 3 Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2 - 4$. Grafícala y analiza sus propiedades.

Solución

1. Hallamos el vértice, los valores de a, b, c son
   $a = 1, b = 0, c = -4$
   $x_v = \frac{-(0)}{2(1)} = \frac{0}{2} = 0$
   $y_v = (0)^2 - 4$
   $= 0 - 4 = -4$
   $\therefore$ el vértice es $V(0; -4)$

2. Hallamos las raíces
   $x^2 - 4 = 0$
   $(x + 2)(x - 2) = 0$
   $x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$

3. El intercepto que el eje y es en $y = -4$.



Propiedades

1. Dominio: $x \in \mathbb{R}$

2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$

3. Recorrido:$y \in \mathbb{R}[-4; \infty)$

4. Eje de simetría $x = 0$

5. Monotonía: no es monótona, pero presenta intervalos de monotonía.
   Monotonía decreciente: $x \leq 0$
   Monotonía creciente: $x \geq 0$

6. Raíces
   $x^2 - 4 = 0$
   $(x + 2)(x - 2) = 0$
   $x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$

7. Simetría: es una función par porque:
   $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4$
   $\therefore f(x) = f(-x)$ no es una función impar porque:

$-f(x) = -(x^2 - 4) = -x^2 + 4$
$\therefore -f(x) \neq f(-x)$

8. No es un función inyectiva en todo su dominio porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.

9. No es sobreyectiva porque el codominio no es igual a recorrido.

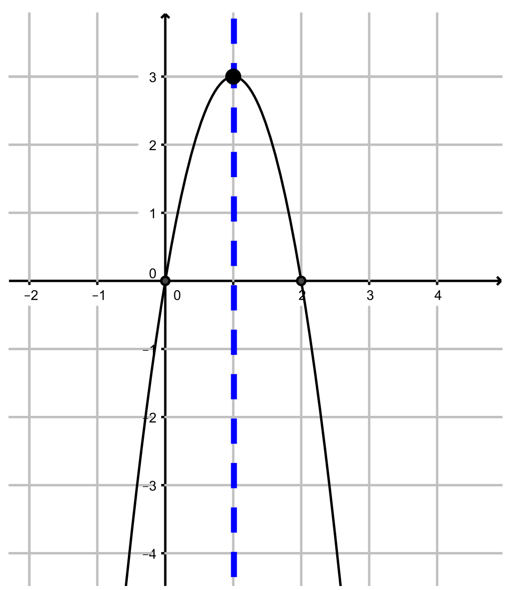
10. La función no es biyectiva porque no es inyectiva y no es sobreyectiva.

11. Valor Máximo: no tiene
Valor mínino: $y = -4$

Ejemplo # 4
Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = -3x^2 + 6x$. Grafícala y analiza sus propiedades.

Solución

1. Hallamos el vértice, los valores de a, b, c son
$a = -3, b = 6, c = 0$
$x_v = \frac{-(6)}{2(-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$
$y_v = -3(1)^2 + 6(1)$
$= -3 + 6 = 3$
$\therefore$ el vértice es $V(1; 3)$



2. Hallamos las raíces
$-3x^2 + 6x = 0 / \bullet (-1)$
$3x^2 - 6x = 0$
$3x(x - 2) = 0$
$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$

3. El intercepto que el eje y es en $y = 0$.

Propiedades

1. Dominio: $x \in \mathbb{R}$

2. Codominio: $y \in \mathbb{R}$

3. Recorrido:$y \in \mathbb{R}(-\infty; 3]$

4. Eje de simetría $x = 1$

5. Monotonía: no es monótona, pero presenta intervalos de monotonía.
   Monotonía decreciente: $x \geq 1$
   Monotonía creciente: $x \leq 1$

6. Raíces
   $-3x^2 + 6x = 0 / \bullet (-1)$
   $3x^2 - 6x = 0$
   $3x(x-2) = 0$
   $x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$

7. Simetría: la función no es par porque:
   $f(-x) = -3(-x)^2 + 6(-x) = -3x^2 - 6x$
   $\therefore f(x) \neq f(-x)$ no es una función impar porque:
   $-f(x) = -(-3x^2 + 6x) = 3x^2 - 6x$
   $\therefore -f(x) \neq f(-x)$

8. No es un función inyectiva en todo su dominio porque al trazar una recta horizontal esta corta al gráfico en un solo punto.

9. No es sobreyectiva porque el codominio no es igual a recorrido.

10. La función no es biyectiva porque no es inyectiva y no es sobreyectiva.

11. Valor Máximo: $y = 3$
    Valor mínino: no tiene

Ejercicios Propuestos

Sea las siguiente funciones de$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. grafíquelas y analice sus propiedades.

1. $y = x^2 - 9$
2. $y = 2x^2 - 3x - 5$
3. $y = 4x^2 - 8x$
4. $y = x^2 - 6x + 9$
5. $y = -x^2 - 6x + 7$
6. $y = -2x^2 + x + 3$
7. $y = \frac{1}{2}x^2 + x$
8. $y = -3x^2 - 8x - 4$
9. $y = 4x^2 - 9$
10. $y = -x^2 + 1$
11. $y = -6x^2 - 3x$
12. $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$
13. $y = x^2 - 8x - 9$
14. $y = -x^2 - x + 6$
15. $y = x^2 + 2x - 8$