ENCUENTRO # 28
TEMA: Inecuaciones.

CONTENIDOS:

1. Inecuaciones fraccionarias
2. Inecuaciones con valor absoluto.

Ejercicio Reto

1. Si a y b son raíces de $x^2 - x - 4 = 0$, hallar $E = \sqrt{1 - \frac{1}{a}} \bullet \sqrt{1 - \frac{1}{b}}$.
   A)$\frac{\sqrt{5}}{4}$ B)$\frac{1}{2}$ C)1 D)$\frac{4}{5}$ E)$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Desarrollo

1.Inecuaciones fraccionarias

Las inecuaciones de las formas que presentamos a continuación o que se reducen a ellas mediante transformaciones equivalentes, se denominan inecuaciones fraccionarias en una variable real:
Sea $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios, $Q(x) \neq 0$ y grado de $Q(x) \geq 1$
$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$
Pasos para resolver una inecuación fraccionaria

1. Comparar con cero la inecuación.
2. Efetuar las operaciones indicadas(suma y resta de fracciones (**No se elimina los denominadores**).
3. Factorizar numerador y denominador
4. Hallar ceros del numerador y denominador.
5. Determinar el signo de la expresión.
6. Representación gráfica de los ceros y de la solución.
7. Conjunto solución.

Ejemplo # 1 Determina el conjunto solución de: $\frac{x-4}{x+1} \leq 0$

Solución

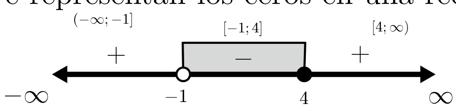
Como la inecuación está igualadad a cero y no hay operaciones pendientes, entonces se procede a factorizar numerador y denominador si es posible, que en este caso ya estan factorizados.

$\frac{x-4}{x+1} \leq 0$

Se hallan los ceros del numerador y denominador

Ceros del númerador	**Ceros del denominador**
$x-4=0$	$x+1=0$
$x=4$	$x=-1$

e representan los ceros en una recta numérica y la solución gráfica.



Por tanto la solución de la inecuación es:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 4\}$$

Ejemplo # 2

Resuelve la inecuación $\frac{x+1}{x^2-5x+6} < 0$

Solución

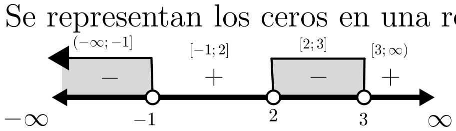
Como la inecuación está igualadad a cero y no hay operaciones pendientes, entonces se procede a factorizar numerador y denominador si es posible.

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} < 0$$
$$\frac{x+1}{(x-3)(x-2)} < 0$$

Se hallan los ceros del numerador y denominador

Ceros del númerador	**Ceros del denominador**	
$x+1=0$	$x-3=0$	$x-2=0$
$x=-1$	$x=3$	$x=2$

Se representan los ceros en una recta numérica y la solución gráfica.



Por tanto la solución de la inecuación es:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \vee 2 < x < 3\}$$

Ejemplo # 3

Halla los valores para los cuales la siguiente desigualdad tiene sentido.

$$\frac{a^2-6a+9}{a^2-2a} \geq 0$$

Solución

Como la inecuación está igualadad a cero y no hay operaciones pendientes, entonces se procede a factorizar numerador y denominador si es posible.

$$\frac{a^2-6a+9}{a^2-2a} \geq 0$$
$$\frac{(a-3)^2}{a(a-2)} \geq 0$$

Se hallan los ceros del numerador y denominador

Ceros del númerador

$(a-3)^2 = 0$

$a-3 = 0$

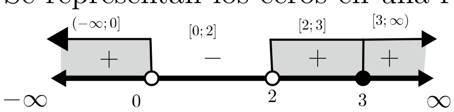
$a = 3$

Ceros del denominador

$a = 0 \quad a-2 = 0$

$a = 2$

Se representan los ceros en una recta numérica y la solución gráfica.



Por tanto la solución de la inecuación es:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x < 0 \vee x > 2\}$$

<u>Ejermplo # 4</u>

Halla los valores de la variable para los cuales la inecuación $\frac{x^2-2x+5}{-x^2-2x+8} \leq 0$, tiene sentido.

Solución

Como la inecuación está igualadad a cero y no hay operaciones pendientes.

Hay que realizar un cambio de signo en el denominador porque la variable de mayor exponente es negativa.

$\frac{x^2-2x+5}{-x^2-2x+8} \leq 0 / \bullet (-1)$

$\frac{x^2-2x+5}{x^2+2x-8} \geq 0$

Posteriormente se procede a factorizar numerador y denominador si es posible.

En este caso el numerador no tiene factorización por ninguno de los casos estudiados por tanto se proceso a desarrollar la fómula de segundo grado.

Se halla el discriminante:

$$a = 1, b = -2, c = 5$$
$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 < 0$$

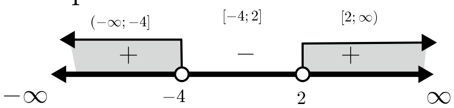
Esto implica que la expresión del numerador no tiene raíces reales.

$$\frac{x^2-2x+5}{(x+4)(x-2)} \geq 0$$

Se hallan los ceros del numerador y denominador

Ceros del númerador	**Ceros del denominador**	
No tiene ceros reales	$x+4=0$	$x-2=0$
	$x=-4$	$x=2$

Se representan los ceros en una recta numérica y la solución gráfica.



Por tanto la solución de la inecuación es:

$$S=\{x\in\mathbb{R}|x<-4\vee x>2\}$$

Ejemplo #5

Determina el conjunto solución:

$$\frac{3x+1}{9-x^2}\geq -1$$

Solución

$\frac{3x+1}{9-x^2}+1\geq 0$

$\frac{3x+1+(9-x^2)}{9-x^2}\geq 0$

$\frac{3x+1+9-x^2}{9-x^2}\geq 0$

$\frac{-x^2+3x+10}{9-x^2}\geq 0/\bullet(-1)$

$\frac{x^2-3x-10}{9-x^2}\leq 0/\bullet(-1)$

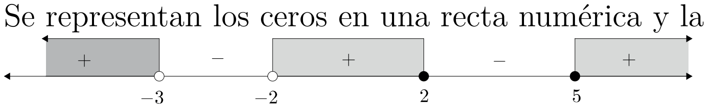
$\frac{x^2-3x-10}{x^2-9}\geq 0$

$\frac{(x-5)(x+2)}{(x-3)(x+3)}\geq 0$

Se hallan los ceros del numerador y denominador

Ceros del númerador		**Ceros del denominador**	
$x-5=0$	$x+2=0$	$x-3=0$	$x+3=0$
$x=5$	$x=-2$	$x=3$	$x=-3$

Se representan los ceros en una recta numérica y la solución gráfica.



Por tanto la solución de la inecuación es:

$$S=\{x\in\mathbb{R}|x<-3\vee -2<x\leq 2\vee x\geq 2\}$$

Ejercicios Propuestos

Determina el conjunto solución

1. $\frac{x-4}{3x-2} > 0$
2. $\frac{3x-6}{x} \geq 0$
3. $\frac{3}{x-5} > 0$
4. $\frac{3-x}{2x+8} \geq 0$
5. $\frac{4+2x}{3-5x} \leq 0$
6. $\frac{2x+3}{x^2-x-12} < 0$
7. $\frac{3x^2+10x-8}{x-2} \geq 0$
8. $\frac{2x-6}{x^2+5x} \leq 0$
9. $\frac{5x-12}{x^2-3x+5} \leq 0$
10. $\frac{x^2-6x+9}{x-7} > 0$
11. $\frac{3x^2-x-10}{-x^2+6x-8} \geq 0$
12. $\frac{10-11x-6x^2}{-7x-6x^2-2} > 0$
13. $\frac{x^2-10}{x+2} \leq 1$
14. $\frac{4x^2+7x-68}{2x^2+3x-35} \leq 2$
15. $\frac{1}{x-6} + \frac{39-x^2}{x^2-36} \geq -1$
16. $\frac{3x-1}{3x-2} - \frac{2x-3}{9x^2-12x+4} > 1$
17. $\frac{2(3-x)}{5x^2-19x-4} \geq 2 - \frac{10x+3}{5x+1}$
18. $\frac{x^2}{x^2+4x-32} - \frac{1}{x+8} \leq -\frac{x}{x^2+4x-32}$

2. Inecuaciones con valor absoluto

El conjunto solución de una desigualdad que involucra valor absoluto, está dado por las siguientes propiedades:

Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$

1. $|a| < b$ se expresa como:$-b < a < b$ o bien $a > -b$ y $a < b$.
2. $|a| \leq b$ se expresa como:$-b \leq a \leq b$ o bien $a \geq -b$ y $a \leq b$.

3 $|a| > b$ se expresa como:$-a > b$ o $a > b$ o bien $a < -b$ o $a > b$.

4 $|a| \geq b$ se expresa como:$-a \geq b$ o $a \geq b$ o bien $a \leq -b$ o $a \geq b$.

Otra propiedad que se puede utilizar en estas inecuaciones con valor absoluto es realizar la siguiente sustitución:

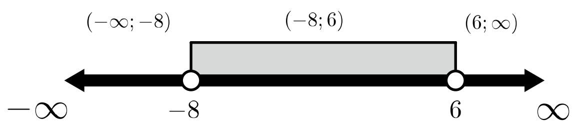
$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Ejemplo # 1 Determina el conjunto soluciónde $|x+1| < 7$

Solución

Variente # 1 La desigualdad $|x+1| < 7$, tiene la forma de la propiedad 1, entonces:

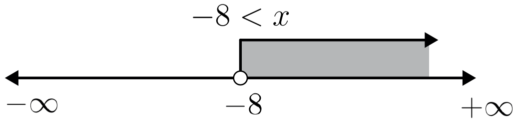
$$-7 < x+1 < 7$$
$$-7-1 < x < 7-1$$
$$-8 < x < 6$$

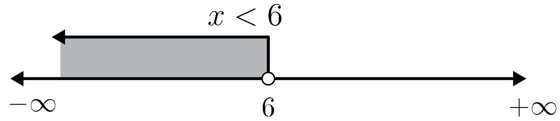


$$s = x \in (-8,6) \text{ o bien}$$
$$s = \{x \in \mathbb{R} : -8 < x < 6\}$$

O bien:

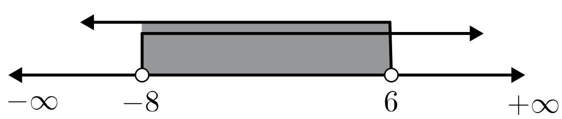
$$-7 < x+1 \qquad\qquad x+1 < 7$$
$$-7-1 < x \qquad\qquad x < 7-1$$
$$-8 < x \qquad\qquad x < 6$$





Nota: Si el signo de la desigualdad original es $(<)$ o $(\leq)$ entonces la solución de la inecuación es la intersección de los gráficos.

$\therefore$ La solución es la intersección entre los gráficos.



$$S = x \in (-8,6) \text{ o bien}$$
$$S = \{x \in \mathbb{R} : -8 < x < 6\}$$

Variente # 2

Sustituimos el valor absoluto por la propiedad $|x+1| = \sqrt{(x+1)^2}$, entonces:

$$\sqrt{(x+1)^2} < 7$$

Resolver la ecuación con radicales. $(\sqrt{(x+1)^2})^2 < (7)^2$

$(x+1)^2 < 49$

$x^2+2x+1 < 49$

$x^2+2x+1-49 < 0$

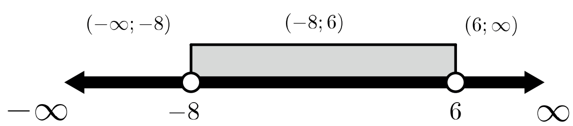
$x^2+2x-48 < 0$

$(x+8)(x-6) < 0$

$x_1 = -8 \qquad x_2 = 6$

Nota: En este caso se debe elegir un valor numérico en cada intervalo y sustituirlo en a desigualdad y verificar que esta se cumple para dicho valor. Si cumple la desigualdad entonces ese intervalo es parte de la solución.

$(-\infty, -8)$	$(-8; 6)$	$(6, \infty)$
$x = -9$	$x = 0$	$x = 7$
$\lvert -9+1\rvert < 7$ $\lvert -8\rvert < 7$ $8 < 7$	$\lvert 0+1\rvert < 7$ $\lvert 1\rvert < 7$ $1 < 7$	$\lvert 7+1\rvert < 7$ $\lvert 8\rvert < 7$ $8 < 7$
no cumple	si cumple	no cumple



Por consiguiente, el conjunto solución es el intervalo $S = x \in \mathbb{R}(-8; 6)$

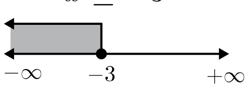
<u>Ejemplo # 2</u>

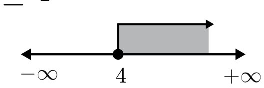
Ecuentra los valores el cojunto solución:$|2x-1| \geq 7$

Solución

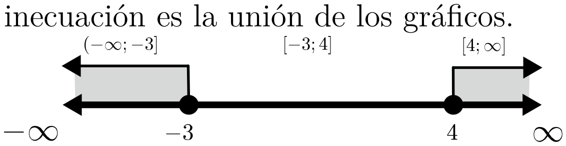
Variente # 1 La desigualdad $|2x-1| \geq 7$, tiene la forma de la propiedad 4, entonces:

$$\begin{array}{ll} -(2x-1) \geq 7 & 2x-1 \geq 7 \\ -2x+1 \geq 7 & 2x \geq 7+1 \\ -2x \geq 7-1 & 2x \geq 8 \\ x \leq \frac{6}{-2} & x \geq \frac{8}{2} \\ x \leq -3 & x \geq 4 \end{array}$$





Nota: Si el signo de la desigualdad original es ($>$) o ($\geq$) entonces la solución de la inecuación es la unión de los gráficos.



$S = x \in (-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$ o bien

$S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -4 \vee x \geq 3\}$

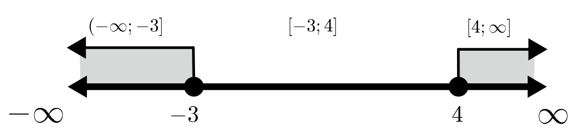
Variente # 2

Sustituimos el valor absoluto por la propiedad $|2x-1| = \sqrt{(2x-1)^2}$, entonces:

$$\sqrt{(2x-1)^2} \geq 7$$

Resolver la inecuación con radicales.
$(\sqrt{(2x-1)^2})^2 \geq (7)^2$
$(2x-1)^2 \geq 49$
$4x^2 - 4x + 1 \geq 49$
$4x^2 - 4x + 1 - 49 \geq 0$
$4x^2 - 4x - 48 \geq 0 \quad \div(4)$
$x^2 - x - 12 \geq 0$
$(x-4)(x+3)2 \geq 0$
$x_1 = 4 \qquad x_2 = -3$

$(-\infty, -3)$	$(-3; 4)$	$(4, \infty)$
$x = -4$	$x = 0$	$x = 5$
$\lvert 2(-4) - 1\rvert \geq 7$ $\lvert -9\rvert \geq 7$ $9 \geq 7$	$\lvert 2(0) - 1\rvert \geq 7$ $\lvert 1\rvert \geq 7$ $1 \geq 7$	$\lvert 2(5) - 1\rvert \geq 7$ $\lvert 9\rvert \geq 7$ $9 \geq 7$
si cumple	no cumple	si cumple

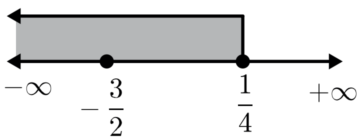


Por consiguiente, el conjunto solución es el intervalo:
$S = x \in (-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$ o bien
$S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -4 \vee x \geq 3\}$
Ejemplo # 3
Determina la solución de la siguiente inecuación:

$$|x-2| \geq 3x + 1$$

Solución
$(\sqrt{(x-2)^2})^2 \geq (3x+1)^2$
$(x-2)^2 \geq (3x+1)^2$
$x^2 - 4x + 4 \geq 9x^2 + 6x + 1$
$x^2 - 4x + 4 - 9x^2 - 6x - 1 \geq 0$
$-8x^2 - 10x + 3 \geq 0 \qquad \bullet(-1)$
$8x^2 + 10x - 3 \leq 0$
$(4x-1)(2x+3) \leq 0$
$x_1 = \frac{1}{4} \qquad x_2 = -\frac{3}{2}$

$(-\infty, -\frac{3}{2}]$	$[-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}]$	$[\frac{1}{4}, \infty)$
$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
$\lvert -1-2\rvert \geq 3(-1)+1$ $\lvert -3\rvert \geq -3+1$ $3 \geq -2$	$\lvert 0-2\rvert \geq 3(0)+1$ $\lvert -2\rvert \geq 1$ $2 \geq 1$	$\lvert 1-2\rvert \geq 3(1)+1$ $\lvert -1\rvert \geq 3+1$ $1 \geq 4$
si cumple	si cumple	no cumple



$S = x \in \mathbb{R} \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$

Ejercicios Propuestos

1. $|x| \geq 7$
2. $|x| < 7$
3. $|x-5| > 5$
4. $|5x-3| \leq 12$
5. $|8-2x| > 2$
6. $|7x-1| < 0$
7. $|2x-1| \leq 19$
8. $|6-\frac{3}{4}x| > 9$
9. $|\frac{5}{4}(x-10)| \leq 10$
10. $|\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{8}$
11. $|x-1| < 2x$
12. $|2x+3| \geq x+3$
13. $|2-2x| \leq x-4$
14. $|\frac{x+1}{x-2}| < 1$
15. $|\frac{x+4}{x}| > 2$
16. $|x| \leq |x-1|$
17. $|3x-4| > |x+4|$