ENCUENTRO # 27
TEMA: Inecuaciones.

CONTENIDOS:

1. Desigualdades.Propiedades.
2. Inecuación lineal o de primer grado.
3. Inecuación cuadrática o de segundo grado.

Ejercicio Reto

1. Al simplificar $\dfrac{\left(a^2-\frac{1}{b^2}\right)^n\left(a-\frac{1}{b}\right)^{-2n}}{\left(b^2-\frac{1}{a^2}\right)^{-n}\left(b+\frac{1}{a}\right)^{2n}}$, el resultado es:
   A)$a-\frac{1}{b}$ B)$b-\frac{1}{a}$ C)$\frac{a}{b}$ D)$\frac{b}{a}$ E)1

2. Si $\begin{cases} I) & \sqrt{x} & -\sqrt{y} & = & 1 \\ II) & x & -y & = & 3 \end{cases}$ entonces el valor de "y" es:
   A)16 B)9 C)4 D)1 E)2

Desarrollo

1.Desigualdades. Propiedades

Definición 1.

Es la relación de orden que existe entre dos cantidades y se representa con los símbolos menor que $(<)$ *y mayor que* $(>)$.

Dada la expresión $3x-2<8$, donde x es una variable, su solución es encontrar el conjunto de valores que la satisfagan, si esto ocurre recibe el nombre de conjunto solución de la desigualdad.

Ejemplo # 1

Verifica cuál de los siguientes elementos del conjunto $\{-3, 2, 4, 5\}$, son soluciones de la desigualdad $3x - 2 < 8$.

Solución

Para $x = -3$

$$\begin{aligned} 3(-3) - 2 &< 8 \\ -9 - 2 &< 8 \\ -11 &< 8 \end{aligned}$$

Desigualdad verdadera

Para $x = 2$

$$\begin{aligned} 3(2) - 2 &< 8 \\ 6 - 2 &< 8 \\ -4 &< 8 \end{aligned}$$

Desigualdad verdadera

Para $x = 4$

$$\begin{aligned} 3(4) - 2 &< 8 \\ 12 - 2 &< 8 \\ 10 &< 8 \end{aligned}$$

Desigualdad falsa

Para $x = 5$

$$\begin{aligned} 3(5) - 2 &< 8 \\ 15 - 2 &< 8 \\ 13 &< 8 \end{aligned}$$

Desigualdad falsa

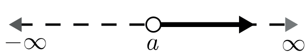
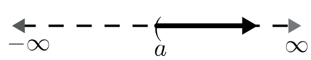
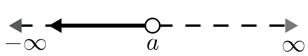
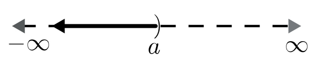
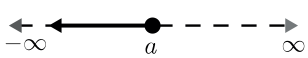
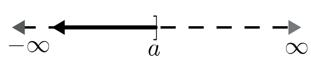
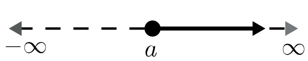
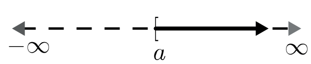
En este ejemplo los valores que hicieron verdadera la desigualdad son soluciones de la expresión.

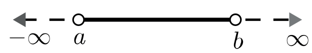
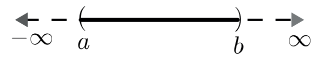
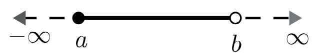
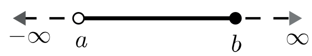
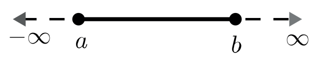
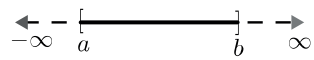
Propiedades de las desigualdades

Sea $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
2. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$.
3. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
4. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Tablas de desigualdades

Desigualdad	Intervalo	Gráfica 1	Gráfica 2
$x > a$	$(a; +\infty)$		
$x < a$	$(-\infty; a)$		
$x \leq a$	$(-\infty; a]$		
$x \geq a$	$[a; \infty)$		

Desigualdad	Intervalo	Gráfica 1	Gráfica 2
$a < x < b$	$(a;b)$		
$a \leq x < b$	$[a;b)$		
$a < x \leq b$	$(a;b]$		
$a \leq x \leq b$	$[a;b]$		

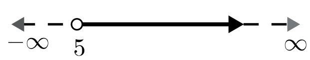
2. Inecuación lineal con una variable

Para determinar el conjunto solución de una inecuación, se procede de la misma manera como en una ecuación lineal y se toman en consideración las propiedades de las desigualdades.

Ejemplo # 1 Resuelve la inecuación siguiente: $6x - 10 > 3x + 5$

Solución

$$\begin{aligned} 6x - 10 &> 3x + 5 \\ 6x - 3x &> 5 + 10 \\ 3x &> 15 \\ x &> \tfrac{15}{3} \\ x &> 5 \end{aligned}$$



$S = x \in (5; +\infty)$

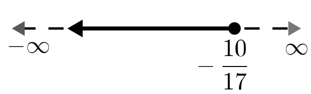
$S = \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$

Ejemplo # 2

Determina el conjunto solución:$4(2x+1) leq 6 - 3(4-3x)$

Solución

$$\begin{aligned} 4(2x+1) &\leq 6 - 3(4-3x) \\ 8x + 4 &\leq 6 - 12 - 9x \\ 8x + 9x &\leq 6 - 12 - 4 \\ 17x &\leq -10 \\ x &\leq -\tfrac{10}{17} \end{aligned}$$



$S = x \in (-\infty; -\frac{10}{17}]$

$S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{10}{17}\}$

Ejemplo # 3

Halla los valores de las la variabel para loc cuales la desigualdad tiene sentido:

$$(x-3)^2 - (x+2)(x-2) \leq 11 - 3x$$

Solución

$$\begin{aligned}
(x-3)^2-(x+2)(x-2) &\leq 11-3x\\
x^2-6x+9-(x^2-4) &\leq 11-3x\\
\cancel{x^2}-6x+9\cancel{-x^2}+4 &\leq 11-3x\\
-6x+9+4 &\leq 11-3x\\
-6x+3x &\leq 11-9-4\\
-3x &\leq -2/\cdot(-1)\\
3x &\geq 2\\
x &\geq \tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

$S = x \in [\frac{2}{3}, \infty)$

$S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{2}{3}\}$

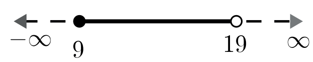
Inecuaciones lineales dobles

<u>Ejemplos # 1</u>

Determina el cojunto solución de $3 \leq \frac{2x-3}{5} < 7$

Solución

$$\begin{array}{rcccl}
3 & \leq & \frac{2x-3}{5} & < & 7/\bullet(5)\\
15 & \leq & 2x-3 & < & 35\\
15+3 & \leq & 2x & < & 35+3\\
18 & \leq & 2x & < & 38\\
\frac{18}{2} & \leq & x & < & \frac{38}{2}\\
9 & \leq & x & < & 19
\end{array}$$



$S = x \in [9, 19)$

$S = \{x \in \mathbb{R} : 9 \leq x < 19\}$

<u>Ejemplo # 2</u> ¿Cuál es el intervalo solución para la siguiente inecuación $4 > \frac{2-3x}{7} > -2$?

Solución

$$\begin{array}{rcccl}
4 & > & \frac{2-3x}{7} & > & -2/\bullet(7)\\
28 & > & 2-3x & > & -14\\
28-2 & > & -3x & > & -14-2\\
26 & > & -3x & > & -16/\bullet(-1)\\
-26 & < & 3x & < & 16\\
-\frac{26}{3} & < & x & < & \frac{16}{3}
\end{array}$$

$S = x \in (-\frac{26}{3}, \frac{16}{3})$

$S = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{26}{3} < x < \frac{16}{3}\}$

Ejercicios propuestos

Resuelve

1. $9x+8-4x < 3x+12$
2. $5(x+4)-2(x-3) > 8$
3. $6-3(x+2) \leq 4(x-3)+5(x+3)$
4. $(x-5)(x-3)-x(x-10) < 1$
5. $(x-3)^2-(x-4)(x+2) \leq 5$
6. $(9x-2)(x-1)-(3x-2)^2 \geq 4(x+1)$

7. $x - \frac{3x}{5}\left[4x - \left(\frac{3x}{2} + \frac{21}{10}\right)\right] > 0$

8. $3x + \frac{7x}{6} > 5 + \frac{2x}{3} + \frac{2(2x+5)}{9}$

9. $\frac{(8x-1)(2x+5)}{4} - (2x+3)^2 < -2x - 7.5$

10. $(x+2)(x^2 - 3x - 4) \geq x(x^2 - x - 4) - 2$

11. $(2x-1)(2 - x^2 - 3x) - (x+4)(2x - 2x^2 + 5) < 3x^2$

12. $\frac{2x+1}{3} - 1 \geq 1 + \frac{3x}{2}$

13. $\frac{x-(1-2x)}{-4} - 1 \leq \frac{-x}{2}$

14. $(x-1)(x+1) - 3(x-1) > x^2 + 7$

15. $3x - \frac{x+1}{2} \geq 2x - 1$

16. $(x-3)^2 - (x+2)(x-2) \geq 11 - 3x$

17. $-7 < 4x + 1 < 13$

18. $-6 < 2x - 3 < 4$

19. $-8 \leq 3x + 1 \leq -2$

20. $-10 \leq x - 1 < -2$

21. $-11 < 3x + 1 < 7$

22. $-15 \leq x + 8 < -2$

23. $-5 < 3x + 1 < 13$

24. $8 - x \leq 5x + 32 < x + 36$

25. $-100 < 0.1x < 10$

26. $x^2 + 2 \leq x^2 + 5x \leq x^2 + 3$

27. $-1 < \frac{5-x}{3} \leq 7$

28. $-6 < \frac{2x-3}{4} < 2$

29. $-3 \leq \frac{4-2x}{5} < 1$

30. $-5 \leq \frac{2-3x}{6} \leq 2$

31. $2 < \frac{4-x}{3} < 6$

32. $0 \leq 6 - \frac{3}{2}x \leq 9$

33. $4 \leq x - \frac{1}{2} \leq 9$

34. $\frac{1}{3} > \frac{x-1}{5} > \frac{1}{9}$

3. Inecuaciones cuadráticas con una variable

Método por intervalos

Se factoriza la expresión cuadrática, después se buscan valores que hagan cero a cada factor, entonces los valores se indican en la recta numérica y se forman los intervalos a analizar.

Ejemplo # 1

Resuelve la siguiente inecuación: $x^2 - 5x - 6 > 0$

Solución

Se factoriza la expresión cuadrática.

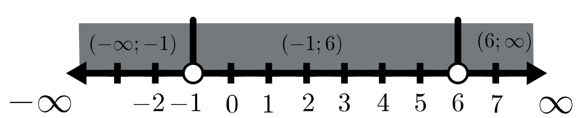
$$(x-6)(x+1) > 0$$

El conjunto solución son los valores que hacen el producto positivo.

Se buscan los valores que hacen cero a cada factor.

$$\begin{aligned} x-6 &= 0 \\ x &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Los valores son 6 y -1, se localizan en la recta numérica y se forman los intervalos.



De cada intervalo se toma un valor cualquiera, el cual se sustituye en los factores para determinar los signos de éstos. Posteriormente, se multiplican los signos para tomar como solución el intervalo o los intervalos que cumplen con la desigualdad dada.

Para el intervalo$(-\infty; -1)$

Se toma el valor de $x = -4$ y se sustituye en cada factor:

$$(4-6)(-4+1) = (-10)(-3) = 30$$
$$\text{El producto es positivo } (-)(-) = +$$

Para el intervalo $(-1; 6)$

Se toma el valor de $x = 0$ y se sustituye en cada factor:

$$(0-6)(0+1) = (-6)(1) = -6$$
El producto es positivo $(-)(+) = -$

Para el intervalo $(6;\infty)$
Se toma el valor de $x = 7$ y se sustituye en cada factor:

$$(7-6)(7+1) = (1)(8) = 8$$
El producto es positivo $(+)(+) = +$

El intervalo solución es la unión de los intervalos donde el producto es positivo, es decir,

$$(-\infty;-1) \cup (6;\infty)$$

Otra forma de resolver una desigualdad cuadrática mediante intervalos, es construir una tabla que indique los signos resultantes de cada factor y el signo resulta del producto de dichos factores.
Ejemplo # 2
Resuelve la desigualadad:$x^2 - 25 \geq 0$
Solución
Se factoriza la expresión cuadrática.

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &\geq 0 \\ (x-5)(x+5) &\geq 0 \end{aligned}$$

Se buscan los valores que hacen cero a cada factor.

$$\begin{array}{ccccccc} x+5 & 0 & 0 & \quad & x-5 & = & 0 \\ x & = & -5 & \quad & x & = & 5 \end{array}$$

Los valores que hacen cero al producto son $x = -5$ y $x = 5$, entonces los intervalos que se forman son:

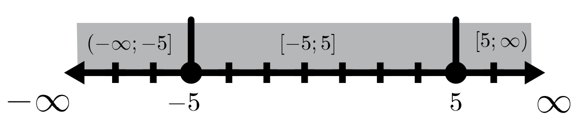


Tabla de signos

Intervalos	$(\infty;-5]$ para $x=-6$	$[-5;5]$ para $x=0$	$[5;\infty)$ para $x=6$
Signo de $x-5$	$-6-5=-11$	$0-5=-5$	$6-5=+1$
Signo de $x+5$	$-6+5=-1$	$0+5=+5$	$6+5=+11$
Signo del producto $(x-5)(x+5)$	$(-)(-)=+$	$(-)(+)=-$	$(+)(+)=+$

El conjunto solución son los valores que hacen el producto positivo o cero.
Por tanto, el conjunto solución es $(-\infty;-5] \cup [5;\infty)$

Ejercicios Propuestos

Resuelve las siguientes inecuaciones:

1. $x^2 - 4x > 0$
2. $x^2 - 7x - 8 \geq 0$
3. $x^2 + 10x + 16 < 0$
4. $2x^2 + 11x - 6 \leq 0$
5. $x^2 + 25 > 10x$
6. $4x^2 \leq 28x - 49$
7. $3x \geq 2x^2 + 5$
8. $-5x^2 + x \leq 2$
9. $x(x+3) > 5x + 3$
10. $(x+4)^2 \geq 2x(5x-1) - 7(x-2)$
11. $(3x-2)(x+4) - (3x-4)^2 > 14x$
12. $(3x+4)(3x-4) + 5x > (2x-1)^2 - 3(x-5)$
13. $(x+6)(x-3) - 7(x+1)(x-1) \leq -4(x - \frac{1}{2})^2$
14. $(2x-4)(x^2-2x-4) - 2x^2(x-3) < -x^2$
15. $(3x-1)(2x^2+x-2) - (2x+1)(4x^2-2x+1) \leq 9 - 2x^3$