ENCUENTRO # 26
TEMA: Matrices.

CONTENIDOS:

1. Determinante de una matriz.

2. Regla de Cramer.

3. Regla de Sarrus

4. Cálculo de desarrollo de menores.

Ejercicio Reto

1. Encuentre las soluciones que satisfagan a la ecuación:

$$(x^2+1)^2-9=0$$

2. Si a, b, c, d y e son números positivos tales que $ab=1$, $bc=2$, $cd=3$, $de=4$ y $ea=5$, cuál es el valor de b?
A) $\sqrt{\frac{3}{10}}$ B) $\sqrt{\frac{8}{15}}$ C) $\sqrt{\frac{16}{5}}$ D) $\sqrt{\frac{40}{3}}$ E) $\sqrt{30}$

3. El producto de las edades de mis hijos es 1664. La edad del más grande es el doble que la del más pequeño. ¿Cuántos hijos tengo?
A) 2 B) 3 C) 4 D)5 E) 6

Determinantes

El determinante de una matriz A de orden n, es un número escalar que se relaciona con la matriz, mediante una regla de operación. Denotada por $\det A = |A|$.
Sea la matriz de orden 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

El determinante de A está dado por:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

Ejemplo 1.1. *Evalúa el determinante de la matriz:*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución: Cada elemento se sustituye en la fórmula y se realizan las operaciones.

$$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 1 \cdot (-2) = 20 + 2 = 22$$

Finalmente el determinante de B es 22.

Ejemplo 1.2. *Cuál es el determinante de la siguiente matriz:*

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{4}{5} & 6 \end{bmatrix}$$

Solución: Se aplica la definición.

$$\det B = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{4}{5} & 6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 6 - (-\frac{4}{5}) \cdot 3 = -3 + \frac{12}{5} = -\frac{3}{5}.$$

Por consiguiente, resultado es $-\frac{3}{5}$.

Ejemplo 1.3. *Determina* $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 - b^2 & a - b \end{vmatrix}$.

Solución: Se aplica la definición.

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 - b^2 & a - b \end{vmatrix} = a(a-b) - (a^2 - b^2)(1) = a^2 - ab - a^2 + b^2 = b^2 - ab.$$

Ejercicios Propuestos

Encuentra el valor de los siguientes determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} a & a - b \\ a & b \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} m - n & m + n \\ m & m - n \end{vmatrix}$

6. $\dfrac{\begin{vmatrix} a & b-a \\ b & a-b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a & a \end{vmatrix}}$ 7. $\dfrac{\begin{vmatrix} x & x-2 \\ 5 & x-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 5 \\ 5 & x \end{vmatrix}}$

Método de Cramer

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Por el método de reducción se determina x

$$\begin{array}{c} (a_1x + b_1y = c_1)(b_2) \\ \underline{(a_2x + b_2y = c_2)(-b_1)} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1 \\ \underline{-a_2b_1x - b_1b_2y = -b_1c_2} \end{array}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$$

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

De forma análoga se determina y

$$\begin{array}{c} (a_1x + b_1y = c_1)(-a_2) \\ \underline{(a_2x + b_2y = c_2)(a_1)} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} -a_1a_2x - a_2b_1y = -a_2c_1 \\ \underline{a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2} \end{array}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Finalmente la solución general del sistema es:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}};\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}};\ \text{con } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

El método de Cramer consiste en aplicar las definiciones anteriores y según los resultados se puede concluir que las rectas son:

- **Concurrentes:** si los determinantes son diferentes de cero.
- **Coincidentes:** si los determinantes son todos iguales a cero.
- **Paralelas:** si únicamente el determinante del denominador es igual a cero.

Rectas concurrentes. Si ocurre que:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

El sistema tiene una solución que es el punto $P(x, y)$

Ejemplo 1.4. *Aplica el método de Cramer y determina la solución del sistema:*

$$\begin{cases} 4x - y = -9 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases}$$

Solución. Se aplica la solución general

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -9 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-45 - 1}{20 + 3} = \frac{-46}{23} = -2; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-4 + 27}{20 + 3} = \frac{23}{23} = 1$$

Por tanto, la solución es $x = -2$, $y = 1$, las rectas son concurrentes.

Rectas coincidentes. Si ocurre que:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

El sistema tiene un conjunto infinito de soluciones, es decir, es un sistema de dos rectas coincidentes. Por tanto, el conjunto está formado por todos los pares ordenados que satisfacen cualquiera de las ecuaciones del sistema dado.

Ejemplo 1.5. *Aplica el método de Cramer y determina la solución del sistema:*

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$$

Solución. Se aplica la solución general

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-8 + 8}{-4 + 4} = \frac{0}{0}; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16 - 16}{-4 + 4} = \frac{0}{0}$$

El sistema son rectas coincidentes, por tanto, el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.
Rectas Paralelas. Si ocurre que:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0; \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Entonces el sistema no tiene solución, es decir, el sistema representa rectas paralelas.

Ejemplo 1.6. *Aplica el método de Cramer y determina la solución del sistema:*

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -6x + 3y = 2 \end{cases}$$

Solución. Se aplica la solución general

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{15+2}{6-6} = \frac{17}{0}; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{4+30}{6-6} = \frac{34}{0}$$

Por consiguiente, el sistema no tiene solución.

Ejercicios Propuestos

1. $\begin{cases} 3x-4y=15 \\ -2x+3y=-12 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x-8y=-13 \\ 5y+2x=-19 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5p-q=7 \\ -2p+3q=5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 10m-3n=19 \\ 15m-24n=35 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 7u+2v=-5 \\ -35u-10v=25 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 60p-25q=15 \\ -12p+5q=-3 \end{cases}$

Regla de Sarrus

La regla de Sarrus es un método fácil para memorizar y calcular un determinante de 3×3. Recibe su nombre del matemático francés Pierre Frédéric Sarrus.
Considérese la matriz de 3×3:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Su determinante se puede calcular de la siguiente manera: se repiten los primeros dos reglones y su solución esta dada por:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2 + a_3b_2c_1)$$

Para resolver un sistema de ecuaciones de tres variables de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Se aplican las siguientes fórmulas

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 1.7. *Determina la solución del siguiente sistema de ecuaciones por el método de Cramer.*

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 12 \\ x - y + 4z = 19 \\ 5x - 3y + z = 8 \end{cases}$$

Solución. Se aplican las fórmulas y se hallan los determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 & -1 \\ 19 & -1 & 4 \\ 8 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 & -1 \\ 19 & -1 & 4 \\ 8 & -3 & 1 \\ 12 & 2 & -1 \\ 19 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(-12+57+64)-(38-144+8)}{(-3+3+40)-(2-36+5)} = \frac{207}{69} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 12 & -1 \\ 1 & 19 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 12 & -1 \\ 1 & 19 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \\ 3 & 12 & -1 \\ 1 & 19 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(57-8+240)-(12+96-95)}{(-3+3+40)-(2-36+5)} = \frac{276}{69} = 4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & 19 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & 19 \\ 5 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(-24-36+190)-(16-171-60)}{(-3+3+40)-(2-36+5)} = \frac{345}{69} = 5$$

Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones es: $(x, y, z) = (3, 4, 5)$.

Ejercicios Propuestos

1. $\begin{cases} 2x - y + 5z = 16 \\ x - 6y + 2z = -9 \\ x + 4y - z = 32 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x + 5y - z = 4 \\ 10y - 6x - 3z = 1 \\ 4z - 15y + 9x = -1 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x = 2(1 + 2y) - 9z \\ y = (2z - x) - 13 \\ z = 2(y + 4) + 3x \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4n - 2m - 3r = 1 \\ m + 3n - 5r = -4 \\ 3m - 5n + r = 0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} a + b = 3 \\ a - c = 8 \\ b - 2c = 4 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{3}{b} - \frac{1}{c} = 11 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 7 \\ \frac{3}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 8 \end{cases}$

Cálculo de Determinantes por medio de cofactores

Definición 1 (Menor). *El menor de rango r de la matriz A, correspondiente a las filas $i_1, i_2, \ldots, i_r$, y las columnas $j_1, j_2, \ldots, j_r$, se define como el determinante de la submatriz $A_{\{i_1,\ldots,i_r\},\{j_1,\ldots,j_r\}}$ y se denota por* $M_A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$.

Ejemplo 1.8. *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución. Entonces $M_A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7.$

Definición 2 (Cofactor). *El cofactor de la entrada (p, q) de la matriz A se define como el menor correspondiente a las filas y las columnas, multiplicado por $(-1)^{p+q}$. Lo denotamos por $\widehat{A}_{p,q}$*

$$\widehat{A}_{p,q} = (-1)^{p+q} M_A\begin{pmatrix} 1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n \\ 1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Recordamos que el $M_A\binom{1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,n}{1,\ldots,q-1,q+1,\ldots,n}$ es el determinante de la matriz obtenida al eliminar la fila p y la columna q de A.

Ejemplo 1.9. *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

encuentre el cofactor de la fila 2 y columna 3.

Solución. Entonces
$$\widehat{A}_{2,3} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 28 = -37.$$
Sea
$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$
una matriz de orden n entonces el determinante de A esta definido por:
$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{p,k} \widehat{A}_{p,k}.$$
$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{k,p} \widehat{A}_{k,p}.$$

Ejemplo 1.10. *Calcule el determinante de* $D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución. Para calcular el determinante de D, podemos hacer la expansión en la primera fila de la matriz, por lo que tendríamos:
$$\begin{aligned} \det D =& 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ =& 3 \cdot 1 \cdot (3+4) + (-2) \cdot (-1) \cdot (15+8) + 1 \cdot 1 \cdot (10-4) \\ =& 21 + 46 + 6 = 73 \end{aligned}$$

Propiedades de los determinantes

1. Si se intercambian dos renglones de una matriz A de orden n, el determinante de la matriz resultante es:
$$\det A = -\det A$$
2. Si son cero todos los elementos de un renglón o columna de una matriz A de orden n, entonces
$$\det A = 0$$
3. Si 2 renglones son iguales de una matriz A de orden n, entonces
$$\det A = 0$$

4. Si se tiene una matriz A de orden n, ya sea matriz triangular superior o inferior, entonces

$$\det A = \text{producto de los elementos de la diagonal principal}$$

5. Si un renglón de una matriz se multiplica por un escalar λ, entonces

$$\det A = \lambda \det A$$

6. Si A y B son matrices de orden n, entonces

$$\det AB = \det A \cdot \det A$$

Problemas Propuestos

Calcule los determinantes usando las operaciones elementales y expansión en filas o columnas:

a) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$