ENCUENTRO # 25
TEMA: Matrices.

CONTENIDOS:

1. Tipos de matrices.

2. Operaciones con Matrices.

Ejercicio Reto

1. Si $\begin{cases} \frac{xy}{x+y} &= \frac{1}{9} \\ \frac{xz}{x+z} &= \frac{1}{13} \\ \frac{yz}{y+z} &= \frac{1}{6} \end{cases}$, hallar $D = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.
   A)13 B)14 C)15 D)16 E)17

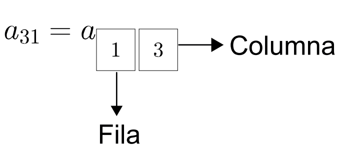
2. Si $xyz = 2$, entonces $(xy + \frac{1}{x})(yz - \frac{1}{x})(xz + \frac{2}{y})$ es igual a:
   A)9 B)8 C)7 D)5 E)6

Desarrollo

Definición
Una matriz es un arreglo rectangular de números de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los números $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{ij}$, reciben el nombre de elementos de la matriz. Para simplificar la notación, la matriz se expresa :$A = a_{ij}$El primer subíndice de cada elemento indica la fila, y el segundo la columna de la matriz donde se encuentra el elemento.



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & -7 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determina:$a_{21}, a_{22}, a_{33}, a_{43}$

Solución

a_{21}:es el valor que se encuentra en el fila 2, columna 1,s decir, $a_{21} = -3$

a_{22}:es el valor que se encuentra en el fila 2, columna 2,s decir, $a_{22} = 4$

a_{33}:es el valor que se encuentra en el fila 3, columna 3,s decir, $a_{33} = -7$

a_{43}:es el valor que se encuentra en el fila 4, columna 3,s decir, $a_{43} = 1$

Orde de una matriz

El tamaño de una matriz de m renglones y n columnas se conoce como orden y se denota por $m \times n$.

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

orden$= 1 \times 3$ orden$= 3 \times 1$ orden$= 2 \times 2$ orden$= 2 \times 3$

Número de elementos de una matriz

En una matriz de m renglones y n columnas, el número de elementos es $m \times n$, m veces n elementos.

Ejemplos:

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$
$m \times n = 1 \times 3 = 3$
3 elementos

$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$
$m \times n = 3 \times 1 = 3$
3 elementos

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
$m \times n = 2 \times 2 = 4$
4 elementos

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$
$m \times n = 2 \times 3 = 6$
6 elementos

Tipos de matrices

Matriz cuadrada. Es aquella cuyo número de filas es igual al número de columnas; es decir, una matriz de n filas con n columnas, recibe el nombre de matriz cuadrada de orden n.

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
Matriz cudrada de orden 2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$
Matriz cudrada de orden 3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
Matriz cudrada de orden n

Ejemplos:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$
Matriz cudrada de orden 2

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Matriz cudrada de orden 3

Matriz renglón. Es aquella de orden $1 \times n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$
Orden= 1×4

$A = \begin{bmatrix} -3 & 7 & \frac{1}{3} & -1 & 8 \end{bmatrix}$
Orden= 1×5

Matriz columna. Es aquella de orden $m \times 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$
Orden2×1

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$$
Orden4×1

Matriz cero (matriz nula). Es aquella en la cual todos los elementos son cero.
Ejemplos:

$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Matriz nula de orden$= 1 \times 0$

$O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Matriz nula de orden$= 4 \times 1$

$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Matriz nula de orden 3

$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Matriz nula de orden 3×2

Matriz diagonal. Es aquella matriz de orden n que tiene elementos distintos de cero en la diagonal principal, es decir,$M(m_{ij})$, donde $m_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz identidad (matriz unidad). Es aquella matriz diagonal de orden n, cuyos elementos distintos de cero son 1, se denota por I_n.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Ejmplos:

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Matriz identidad de orden 2

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Matriz identidad de orden 3

Matriz triangular superior. Es aquella matriz cuadrada de orden n, donde los elementos $a_{ij} = 0$, para $i > j$, es decir, todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
Matriz superior de orden 2

$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz superior de orden 3

Matriz triangular inferior. Es aquella matriz cuadrada de orden n, donde los elementos $a_{ij} = 0$, para $i < j$, es decir, todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz superior de orden 3

Ejemplos:

$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$
Matriz inferior de orden 2

$M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$
Matriz inferior de orden 4

Matriz simétrica. Es aquella matriz cuadrada de orden n, tal que los elementos $a_{ij} = a_{ji}$.

Ejemplos:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
La matriz A de orden 2, es simétrica si:
$\{a_{12} = a_{21}$

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$
La matriz B de orden 3, es simétrica si:
$$\begin{cases} b_{12} = b_{21} \\ b_{13} = b_{31} \\ b_{23} = b_{32} \end{cases}$$

$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$
La matriz C de orden 3, es simétrica si:
$$\begin{cases} c_{12} = c_{21} = 6 \\ c_{13} = c_{31} = -3 \\ c_{23} = c_{32} = 4 \end{cases}$$

Matrices iguales. Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y sus elementos correspondientes son respectivamente iguales.

Ejemplo # 1

Determina si las matrices $\begin{bmatrix} \sqrt{16} & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 4 & (-1)^2 & 5 \\ -1 & \sqrt{4} & -3 \\ 1 & 0 & \sqrt[3]{27} \end{bmatrix}$ sn iguales.

Solución

Las matrices son iguales porque son del mismo orden y sus elementos son iguales:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{16} & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 4 & (-1)^2 & 5 \\ -1 & \sqrt{4} & -3 \\ 1 & 0 & \sqrt[3]{27} \end{bmatrix}$$

Ejemplo # 2

Dtermina el vaor de x, y, w, z parque que:

$$\begin{bmatrix} x+y & 6z \\ 2w & 2x-3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Solución

Las matrices tienen la misma dimensión, al realizar la igualdad de términos se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y & = & -1 \\ 6z & = & 2 \\ 2w & = & 6 \\ 2x-3y & = & -7 \end{cases}$$

AL reoslver el sistema resulta que $x = -2$,$y = 1$ y $z = \frac{1}{3}$

Ejercicos propuestos

1.Determina los valores de las incógnitas, para que las matrices sean iguales.

1. $\begin{bmatrix} a & 3 \\ 4 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y+1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3 & z \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 7 & 3-x \\ y & -1 \\ 8 & 2 \\ 0 & z+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -4 \\ 2-y & -1 \\ 8 & 2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} t+4 & 6-r & 2q+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-t & 5 & 7-q \end{bmatrix}$

Operaciones con matrices

Multiplicación por un escalar

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ y λ un número real, entonces $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ es decir, si:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & m_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ entonces } \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \cdots & \lambda a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta nueva matriz también recibe el nombre de matriz escalar.

<u>Ejemplos# 1</u> Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ determina $3A$

Solución

El escalar 3 se multiplica por cada uno de los elementos de la matriz.

$$3A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2) & 3(-1) \\ 3(4) & 3(6) \\ 3(0) & 3(-2) \\ 3(1) & 3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 18 \\ 0 & -6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Suma

Sean $A = a_{ij}$ y $B = b_{ij}$ dos matrices de orden $m \times n$, la suma de A y B esta determinada por:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij})$$

Donde $A + B$ es la matriz de orden $m \times n$ que rsulta de sumar los elementos correspondientes.

<u>Ejemplo # 1</u>

Determina $A + B$ para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Determina $A+B$

Solución

Las matrices tienen el mismo orden, en este caso, 3×2, entonces la suma se puede realizar; la definición indica que cada término de la primera matriz se suma con los términos correspondientes de la segunda matriz, es decir, se suman$a_{11}+b_{11}, a_{12}+b_{12}, a_{21}+b_{21},\cdots,a_{31}+b_{31}$,

$$A+B=\begin{bmatrix}3&6\\2&4\\-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-1\\6&-7\\4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+2&6+(-1)\\2+6&4+(-7)\\-1+4&0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&5\\8&-3\\-3&0\end{bmatrix}$$

Ejercicios Propuestos

Para las siguientes matrices, efectúa $A+B, A-B, A-A, 4A-3B, 2A-0B$.

1. $A=\begin{bmatrix}-3&1\\0&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-3&1\\0&2\end{bmatrix}$
2. $A=\begin{bmatrix}2&0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-6&7&3\end{bmatrix}$
3. $A=\begin{bmatrix}2&-7\\1&0\\2&-3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-4&5\\2&-6\\1&7\end{bmatrix}$
4. $A=\begin{bmatrix}2&-3&-1\\4&-6&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&-6&4\\-3&2&7\end{bmatrix}$
5. $A=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&5&\frac{1}{8}\\0&3&2\\7&\frac{1}{5}&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{3}&-5&8\\\frac{2}{3}&\frac{4}{5}&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

En las siguientes igualdades, determina el valor de las incógnitas.

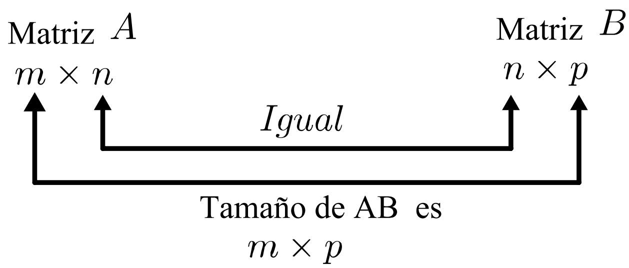
1. $\begin{bmatrix}a-7&5&w\\v-4&1-c&d\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}3&b-1&-4\\-v&-3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&7&w\\-1&-7&5\end{bmatrix}$
2. $2\begin{bmatrix}x+1&1\\5&0\\3&1-w\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}2&n\\y-1&-2\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&8-n\\-5&6\\0&-w\end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix}1&-w&3\\11&9&12\\y&-7&2v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x&-4&2\\-1&z-1&1\\-1&-3&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&5\\10&10&13\\6&-4&v\end{bmatrix}$

Multiplicación

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ una matriz de orden $n \times p$, multiplicación AB da cmo resultadl $C = (c_{ij})$ de orden $m \times p$ tal que:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$
$$i = 1, 2, 3, 4, \cdots, m; \qquad j = 1, 2, 3, 4, \cdots, n$$

El número de columnas de la matriz A, es igual al número de filas de la matriz B.



<u>Ejemplos</u>

Matriz A	Matriz A	Matriz AB
2×3	3×4	2×4
1×2	2×3	1×3
5×4	4×2	5×2
3×1	3×1	No definida

<u>Ejemplos # 1</u>

Realiza la multiplicación de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución

A es una matriz de 2×2 y B de 2×3, por tanto, la multiplicación se puede realizar. Al aplicar la definición se procede de la siguiente manera: se multiplica la primer fila por cada una de las columnas de la segunda matriz.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2)+3(-1) & 2(0)+3(1) & 2(3)+3(5) \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3) & 21 \\ & & \end{bmatrix}$$

Se realiza la misma operación con la segundo fila.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ 5(2+4(-1) & 5(0)+4(1) & 5(3)+4(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ 6 & 4 & 35 \end{bmatrix}$$

Finalmente, se unen los resultados para obtener la matriz AB,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 21 \\ -6 & 4 & 35 \end{bmatrix}$$

<u>Ejemplo # 2</u> Determinar R^2 si $R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

Se transforma R^2 en $R^2 = RR$; esto es posible si R es una matriz cuadrada y se procede a realizar las operaciones indicadas en el ejemplo anterior.

$$R^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(3)+1(0)-1(-2) & 3(1)+1(4)-1(1) & 3(-1)+1(2)-1(0) \\ 0(3)+4(0)+2(-2) & 0(1)+4(4)+2(1) & 0(-1)+4(2)+2(0) \\ -2(3)+1(0)+0(-2) & -2(-1)+1(4)+0(1) & -2(-1)+1(2)+0(0) \end{bmatrix}$$

$$R^2 = \begin{bmatrix} 11 & 6 & -1 \\ -4 & 18 & 8 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicios Propuestos

Para las siguientes matrices determina $AB, BA, A(B-2C), A(BC)$, en caso de ser posible.

1. $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$