ENCUENTRO # 24
TEMA: Sistema de ecuaciones cuadráticos. Resolución de problemas.

CONTENIDOS:

1. Resolución de sistema cuadráticos.
2. Resolución de problemas.

Ejercicio Reto

1. En el sistema
$$\begin{cases} \frac{2}{3x+y}+\frac{4}{3x-y} & = & 3 \\ \frac{2}{3x+y}-\frac{4}{3x-y} & = & 1 \end{cases}$$
El valor de y es:
A)$\frac{1}{2}$ B)$-\frac{2}{3}$ C)$-\frac{3}{2}$ D)$\frac{3}{4}$ E)$\frac{3}{8}$.

Desarrollo

Sistema de ecuaciones cuadráticas
Geométricamente este tipo de sistemas de ecuaciones se generan cuando se intersecan una recta y una curva con ecuación cuadrática (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) o dos ecuaciones cuadráticas; la solución que satisface ambas ecuaciones son los puntos de intersección.
Procedimiento para la resolución de un sistema de ecuaciones cuadrático-lineal con dos incógnitas

1. De la ecuación lineal se despeja una incógnita.
2. El valor de la incógnita que se despejó se sustituye en la misma incógnita de la ecuación cuadrática, y se obtiene una ecuación cuadrática con una sola incógnita.
3. Se obtienen las soluciones o raíces de la ecuación cuadrática, posteriormente éstos se evalúan en el despeje, obteniendo los puntos de intersección.

Ejemplo # 1
Resuelve el sistema:$\begin{cases} x^2+y^2 & = & 10 \\ x+y-2 & = & 5 \end{cases}$

Solución

1. Se despeja de la ecuación lineal $x + y - 2 = 0$ una de las incógnitas,

$$x = 2 - y$$

2. Se sustituye en la ecuación cuadrática la incógnita despejada y se resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \quad \rightarrow \qquad (2-y)^2 + y^2 &= 10 \\ 4 - 4y + y^2 - 10 &= 0 \\ 2y^2 - 4y - 6 &= 0 \quad \div(2) \\ y^2 - 2y - 3 &= 0 \\ (y-3)(y+1) &= 0 \\ y_1 = 3 \quad y_2 = -1 & \end{aligned}$$

Se sustituyen los valores de $y = 3$,$y = -1$ en $x = 2 - y$, se obtiene:

$$\text{Si } y = 3, x = 2 - 3 = -1, \text{ si } y = -1, x = 2 - (-1) = 3$$

Por tanto la solución del sistema son los puntos:$(-1; 3)$ y $3; -1)$.

Procedimiento para la resolución de un sistema de dos ecuaciones cuadráticas

1. Las dos ecuaciones se multiplican por un número, de tal forma que al efectuar la suma de las ecuaciones equivalentes, se elimina una de las dos incógnitas.
2. Se resuelve la ecuación de segundo grado que se obtuvo en el punto anterior.
3. Para concluir, las raíces obtenidas se evalúan en alguna de las dos ecuaciones originales, para obtener los puntos de intersección.

Ejemplo # 2

Resuelve el $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31 \\ 3x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

Solución

Al aplicar el método de reducción, se multiplica por 3 la segunda ecuación,

$$\begin{array}{rrcll} x^2 & +3y^2 & = & 31 & \\ 3x^2 & -y^2 & = & 3 & \bullet(3) \\ \hline & 10x^2 & = & 40 & \end{array}$$

Al resolver la ecuación se determina que, $x_1 = 2$ o $x_2 = -2$

Estos resultados se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones dadas para encontrar el valor de y.

$$\text{Si } x = 2,\ y = \sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{3(2)^2 - 3} = \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = \pm 3$$

$$\text{Si } x = -2,\ y = \sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{3(-2)^2 - 3} = \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = \pm 3$$

Finalmente las soluciones son:$(2;3),(2;-3),(-2;3),(-2;-3)$

Procedimiento para la resolución de un sistema cuadrático mixto

1. Las dos ecuaciones se multiplican por un número, de tal forma que al efectuar la suma de las ecuaciones equivalentes, se elimine el término independiente.
2. Del punto anterior se obtiene una ecuación cuadrática con dos incógnitas igualada a cero, la cual se factoriza.
3. Cada uno de los factores se igualan a cero y se despeja una de las dos incógnitas, quedando una en función de la otra.
4. Los despejes anteriores se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones originales, lo que genera una ecuación de segundo grado con una incógnita.
5. Se determinan las raíces de la ecuación de segundo grado y se evalúan en su respectiva igualdad obtenida en el paso 3, fi nalmente se obtienen los puntos de intersección.

<u>Ejemplo # 3</u>

Resuelve el sistema$\left\{\begin{array}{rcl} 2a^2-3ab+b^2 & = & 15 \\ a^2-2ab+b^2 & = & 9 \end{array}\right.$

Solución

Se eliminan los términos independientes,

$$\begin{array}{rrrrcl} 3 & (2a^2 & -3ab & +b^2 & = & 15) \\ -5 & (a^2 & -2ab & +b^2 & = & 9) \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrrcl} 6a^2 & -9ab & +3b^2 & = & 45 \\ -5a^2 & +10ab & -5b^2 & = & -45 \\ \hline a^2 & +ab & -2b^2 & = & 0 \end{array}$$

La ecuación resultante se resuelve para a:

$$(a+2b)(a-b)=0$$
$$a=-2b, a=b$$

Se sustituyen en la segunda ecuación y se resuelve para b y se determina que:

$$\text{si } a=-2b, \text{ entonces } (-2b)^2-2(-2b)(b)+b^2=9$$
$$9m^2=9$$
$$b=\pm 1$$
$$\text{Si } a=b, \text{ entonces si } a=-2b, \text{ entonces } (b)^2-2(-2b)(b)+b^2=9$$
$$0 \ \emptyset$$

Para $a = b$, la ecuación es inconsistente.
Se calulan los valores de a sustituyendo $b = 1$ y $b = -1$, en relación con: $a = -2b$.
Por consiguiente, las soluciones en el orden $(a; b)$ son:

$$(-2; 1), (2; -1)$$

Ejercicios Propuestos

Ruelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x^2 - 4y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ a + b = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 9 \\ x + y = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy = 8 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -w^2 + wz - y^2 + 7 = 0 \\ w = 2z - 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19 \\ x - y = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} b^2 + 3a^2 = 57 \\ -a^2 - 3b^2 = -43 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 9x^2 - 2y^2 = 1 \\ 9x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} a^2 - b^2 = -28 \\ a^2 + b^2 = 36 \end{cases}$

10. $\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 49 \\ a^2 - ab - 2b^2 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x^2 + \frac{7}{2}xy - \frac{1}{2}y^2 = 42 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 32 \end{cases}$

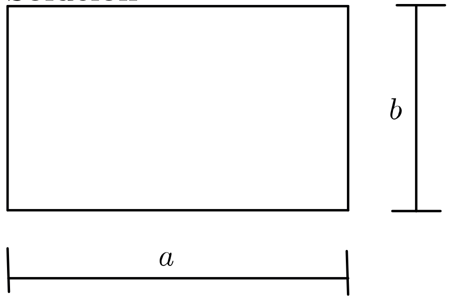
12. $\begin{cases} 3w^2 + 2wz + 2z^2 = 18 \\ 6w^2 + 3wz + 2z^2 = 24 \end{cases}$

Resolución de problemas

Ejemplo # 1

Si el área de un rectángulo es de $216m^2$ y su perímetro es de $60m$. Hallas las dimensiones del rectángulo.

Solución



Datos:
Base del rectángulo: a
Altura del rectángulo: b
Área de un rectángulo: $A = a \bullet b$
Périmetro de un rectágnulo: $P = 2a + 2b$

Por tanto las ecuaciones quedarían:

$$\begin{array}{rrcl} I) & a \bullet b & = & 216 \\ II) & 2a + 2b & = & 60 \\ \hline \end{array}$$

Se despeja una variable en la segunda ecuación:

$$a = \frac{60-2b}{2} = 30 - b$$

Se sustituye el valor de a en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} (30-b)b &= 216 \\ 30b - b^2 &= 216 \\ b^2 - 30b + 216 &= 0 \\ (b-18)(b-12) &= 0 \\ b_1 = 18 \qquad b_2 &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{Si } b_1 = 18 \text{ entonces:} \\ a = 30 - b = 30 - 18 = 12 \\ \text{Si } b_1 = 12 \text{ entonces:} \\ a = 30 - b = 30 - 12 = 18 \end{array}$$

Problemas propuestos

1. Hallar dos números cuya suma sea 15 y la diferencia de sus cuadrados es 135.
2. Si al largo de un piso rectangular s aumentan 2 metros y al ancho un metro, su área aumentará en $24m^2$. además, si el ancho es disminuido en un metro, el área disminuye en $20m^2$. Encontrar las dimensiones del piso.
3. La suma de los cuadrados de dos números es $\frac{29}{9}$ y producto de ellos es $\frac{10}{9}$.Hallar los números.
4. Un rectángulo es tal, que una de las diagonales mide $41cm$ y el área de dicho retángulo es de $360cm^2$. Encontrar las medidas de los lados.
5. Si un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $85cm$ es tal, que al aumentar uno de los lados en $11cm$ y al disminuir el otro en $7cm$, la songitud de la hipotenusa no se altera. Encuentre las longitudes del rectángulo.
6. Hallar dos números sabiendo que el cuadrado del primero es igual al segundo y que la suma del cuadrado del segundo número más el doble del cuadrado del primero es igual a 24.

7. Hallar dos números sabiendo que la suma de sus cuadrados es 180 y que la suma de sus recíprocos es $\frac{1}{4}$.

8. Hallar dos números sabiendo que el producto de ellos es -2 y que la suma de cuatro veces el primero con cinco veces el segundo es seis.