ENCUENTRO # 23
TEMA: Sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas(SEL 3x3). Resolución de problemas.

CONTENIDOS:

1. Resolución de sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas .
2. Resolución de problemas.

Ejercicio Reto

1. En una región apartada de Indonesia aún los nativos acostumbran a hacer negocios con objetos y no utilizan dinero. Por dos lanzas y tres anzuelos se pueden obtener veintiséis cocos, mientras que con una lanza y trece cocos se pueden conseguir cinco anzuelos. ¿Cuántos cocos se pueden adquirir con cinco lanzas y siete anzuelos?
   A)36 B)50 C)93 D)63 E)45
2. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt[3]{6x+9}$ y $g(x) = \sqrt{2x+3}$, para que valor de $x \in \mathbb{N}$ se cumple que: $g(x) - f(x) = 0$.
   A)6 B)5 C)4 D)1 E)3

Desarrollo

Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{array}{cccc} a_1x & +b_1y & +c_1z & = & d_1 \\ a_2x & +b_2y & +c_2z & = & d_2 \\ a_3x & +b_3y & +c_3z & = & d_3 \end{array}$$

Método para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas
Para resolver un sistema de este tipo, se pueden utilizar los mismos métodos empleados para resolver los sistemas de dos variables, aunque se recomienda emplear el de reducción y de Cramer(se estudiará en próximas clases).
El sistema puede tener solución única, conjunto infinito de soluciones o no tener solución.
Reducción (suma y resta)
Se procede de la misma forma que en los sistemas de ecuaciones con dos variables, es

decir, se toman dos de las tres ecuaciones y se elimina una de las variables. Posteriormente, se toma cualquiera de las ecuaciones que se eligieron y en la que no se utilizó se elimina la misma variable, de tal manera que se obtienen dos ecuaciones con dos variables; al hallar la solución del sistema se determina el valor de las dos variables, después se sustituyen en cualquiera de las tres ecuaciones originales, para obtener la tercer variable.

Ejemplo #1

Determina la solución del sistema de ecuaiones:

$$\begin{cases} 2x & -3y & -5z & = & -19 \\ 3x & -4y & +z & = & -2 \\ x & +y & +z & = & 6 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{array}{rrrrcr} I) & 2x & -3y & -5z & = & -19 \\ II) & 3x & -4y & +z & = & -2 \\ III) & x & +y & +z & = & 6 \\ \hline \end{array}$$

Se toman dos ecuaciones, por ejemplo la ecuación (I) y (II) y por el método de eliminación se elimina x.

$$\begin{array}{rrrrcrl} I) & 2x & -3y & -5z & = & -19 & \bullet(-3) \\ II) & 3x & -4y & +z & = & -2 & \bullet(2) \\ \hline & -6x & +9y & +15z & = & 57 & \\ & 6x & -8y & +2z & = & -4 & \\ \hline IV) & & y & +17z & = & 53 & \end{array}$$

Se toman las ecuaciones (I) y (III) , se elimina x y se obtiene la ecuación (V).

$$\begin{array}{rrrrcrl} I) & 2x & -3y & -5z & = & -19 & \\ III) & x & +y & +z & = & 6 & \bullet(-2) \\ \hline & 2x & -3y & -5z & = & -19 & \\ & -2x & -2y & -2z & = & -12 & \\ \hline V) & & -5y & -7z & = & -31 & \end{array}$$

Con las ecuaciones (IV) y (V) el sistema resultante es:

$$\begin{cases} IV) & y & +17z & = & 53 \\ V) & -5y & -7z & = & -31 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema que resulta de (IV) y (V).

$$\begin{array}{rrrcrl} IV) & y & +17z & = & 53 & \bullet(5) \\ V) & -5y & -7z & = & -31 & \\ \hline & 5y & +85z & = & 265 & \\ & -5y & -7z & = & -31 & \\ \hline & & 78z & = & 234 & \\ & & z & = & \frac{234}{78} & \\ & & z & = & 3 & \end{array}$$

Se sustituye el valor de z $=3$ en las ecuaciones (I) o (II) para determinar el valor de y.

$$\begin{array}{rrcr} y & +17z & = & 53 \\ y & +17(3) & = & 53 \\ y & +51 & = & 53 \\ & y & = & 53-51 \\ & y & = & 2 \end{array}$$

Los valores $z = 3$, $y = 2$, se sustituyen en cualquiera de las tres ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} x + y + z = 53 \quad \rightarrow \quad x + 2 + 3 &= 6 \\ x + 5 &= 6 \\ x &= 6 - 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Finalmente, la solución del sistema es $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Ejemplo # 2

Determina el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x & -3y & -4z & = & 5 \\ 5x & -4y & -2z & = & 4 \\ 6x & -9y & -12z & = & 5 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{array}{rrrrcr} I) & 2x & -3y & -4z & = & 5 \\ II) & 5x & -4y & -2z & = & 4 \\ III) & 6x & -9y & -12z & = & 5 \\ \hline \end{array}$$

Se toman las ecuaciones (I) y (II) y se elimina x.

$$\begin{array}{rrrrcrl} I) & 2x & -3y & -4z & = & 5 & \bullet(-5) \\ II) & 5x & -4y & -2z & = & 4 & \bullet(2) \\ \hline & -10x & +15y & +20z & = & -25 & \\ & 10x & -8y & -4z & = & 8 & \\ \hline & IV) & 7y & +16z & = & -17 & \end{array}$$

Se toman las ecuaciones (II) y (III) y se elimina x.

$$\begin{array}{rrrrcrl} II) & 5x & -4y & -2z & = & 4 & \bullet(-6) \\ III) & 6x & -9y & -12z & = & 5 & \bullet(5) \\ \hline & -30x & +24y & +12z & = & -24 & \\ & 30x & -45y & -60z & = & 25 & \\ \hline & V) & -21y & -48z & = & 1 & \end{array}$$

Con las ecuaciones (IV)y(V), se resuelve el sistema de ecuaciones que se forma:

$$\begin{cases} IV) & 7y & +16z & = & -17 \\ V) & -21y & -48z & = & 1 \end{cases}$$

Se resuleve le sistema con (IV) y (V) eliminando z.

$$\begin{array}{rrrcrl} IV) & 7y & +16z & = & -17 & \bullet(3) \\ V) & -21y & -48z & = & 1 & \\ \hline & 9y & +38z & = & -51 & \\ & -21y & -48z & = & 1 & \\ \hline & & 0 & \neq & -50 & \end{array}$$

No hay solución para la ecuación, por tanto, el conjunto solución es vacío.

Ejercicios propuestos

1. $\begin{cases} 2x & -y & +5z & = & 16 \\ x & -6y & +2z & = & -9 \\ 3x & +4y & -z & = & 32 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x & -y & -4z & = & -4 \\ 2x & +2y & +z & = & 11 \\ x & +y & +3z & = & 13 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x & -3y & +2z & = & 0 \\ x & -3y & -2z & = & -2 \\ 4x & +3y & +2z & = & 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x & -2y & +3z & = & 10 \\ 2x & +y & -6z & = & 1 \\ 4x & -2y & -9z & = & 15 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x & +5y & -z & = & 4 \\ 10y & -6x & -3z & = & 1 \\ 4z & -15y & +9x & = & -1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4n & -2m & -3r & = & 1 \\ m & +3n & -5r & = & -4 \\ 3m & -5n & +r & = & 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{2}{a} & -\frac{1}{b} & +\frac{1}{c} & = & 7 \\ \frac{1}{a} & +\frac{1}{b} & -\frac{1}{c} & = & 5 \\ \frac{4}{a} & -\frac{3}{b} & +\frac{2}{c} & = & 11 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x & -2y & +z & = & 16 \\ 2x & +3y & -8z & = & 2 \\ x & -y & +3z & = & 14 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x & -y & +z & = & 4 \\ 2x & +y & -z & = & 5 \\ x & +3y & -4z & = & -5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{2}{a} & +\frac{3}{a} & -\frac{1}{c} & = & 11 \\ \frac{1}{a} & +\frac{1}{b} & +\frac{2}{c} & = & 7 \\ \frac{3}{a} & -\frac{1}{b} & +\frac{1}{c} & = & 8 \end{cases}$

Resolución de Problemas

1. José compró cierto día 3 paletas, 5 helados y 2 dulces, por todo pagó \$28. Al día siguiente, adquirió 4 paletas, 3 helados y 5 dulces con \$25 y el último día, una paleta, un helado y un dulce que le costaron \$7. ¿Cuál es el costo de cada golosina?

2. Miguel, Fabián y Juan Carlos cierto día fueron a comprar ropa. Miguel compró 3 camisas, 4 pantalones y 3 playeras; Fabián, 5 camisas, 3 pantalones y 4 playeras y Juan Carlos, 2 camisas, 6 pantalones y una playera. Si pagaron \$4 100, \$4 600 y \$4 000, ¿cuál es el precio de cada prenda?

3. Eduardo, Hugo y Arturo fueron a comprar ropa. Eduardo se compró 3 playeras, 2 pantalones y 5 pares de calcetas y pagó \$1 710. Hugo adquirió 2 playeras, 3 pantalones y 4 pares de calcetas con \$2 090 y Arturo, 4 playeras, 2 pantalones y 3 pares de calcetas por \$1 730. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

4. Un número está formado por 3 dígitos, el dígito de las centenas es la suma de los otros dos, la suma de las decenas y centenas es igual a 7 veces las unidades. Determina el número, de tal manera que si se invierten los dígitos, la diferencia sea 594.

5. En un número de tres cifras, la suma de ellas es 14. La suma del triplo de la cifra de las centenas con la cifra de las unidades es igual a la cifra de las decenas. Si al números se le suma 99, el nuevo números tiene las mismas cifra pero en sentido inverso. ¿Cuál es el número?

6. En un número de tres cifras la suma de ellas es 15. La suma de las cifras de las centenas y de las decenas es igual al cuádruplo de la cifra de as unidades y si al número se le resta 18 el resultados es el mismo número pero con las cifra de las decenas y las unidades intercambiadas.¿Cuál es el número?

7. En un número de tres cifras, cuatro veces la cifra de las decenas es igual al la suma de las cifras de las centenas y de las unidades, la suma de las cifra de las centenas y las decenas es igual a la cifra de las unidades. Si se divide el número entre un número de dos cifra formado por sus decenas y unidades, el cociente es 13. ¿Cuál es le número?

8. Si tres recipientes contienen respectivamente 30, 40 y 50 l de ácido sulfúrico a distintas concentraciones. Si se juntan los contenidos de los tres recipientes se obtiene una mezcla al 12%, si se junta el primer recipiente con el segundo se obtiene una mezcla al 13.6% y si se junta el segundo con el tercero se obtiene un mezcla al 12%. Halla el % de ácido sulfúrico en cada uno de los recipientes.

9. Un tanque se llena por tres llaves de agua A, B y C. Si se abren las tres al mismo tiempo el tanque se llena en 30 min, si abre las llaves A y B se llena en 45 min y si se abren las llaves B y C se llena en 50 min. ¿en cuanto tiempo se llenará el tanque por cada una de las llaves de forma separada?

10. Una piscina tiene dos llaves A y B que la llenan y un desagüe. Si se abren simultáneamente las dos llaves y el desaüe la piscina se llena en 2,4 horas, si abre la llave A y el desagüe se llena la piscina en 12 horas y si se abre la llave B y el desagüe se llena en 6 horas.¿En qué tiempo se podrá llenar el tanque por cada una de las llaves en forma separada y que tiempo se podrá vaciar por el desagüe?