ENCUENTRO # 22
TEMA: Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

CONTENIDOS:

1. Interpretación gráfica de un sistema de ecuaciones.
2. Método de sustitución.
3. Método de igualación.
4. Método de reducción.
5. Resolución de problemas.

Ejercicio Reto

1. El valor de x en $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=2$, corresponde a:
   A)$\sqrt{2}$ B)2 C)1 D)$\frac{1}{3}$ E)$\frac{4}{3}$.
2. Si $i^2=-1$, Calcular: $\frac{2-3i}{1-i}+\frac{2+3i}{1+i}$
   A)$5i$ B)$-5i$ A)$5i$ C)-5 D)$-10i$ E)5

Desarrollo

Ecuación lineal
Una ecuación de la forma $Ax+By+C=0$, donde A, B y C son constantes reales tales que A y B no son cero, recibe el nombre de lineal.
Ejemplo

1. $2x-3y-4=0$, es una ecuación lineal con: $A=2$,$B=-3$ y $C=-4$
2. $-5x+4y=0$, es una ecuación lineal con: $A=-5$, $B=4$ y $C=0$
3. $x+2=0$, es una ecuación lineal con: $A=1$, $B=0$ y $C=2$.
4. $2y-3=0$, es una ecuación lineal con: $A=0$, $B=2$ y $C0-3$

Solución de una ecuación lineal
Una ecuación lineal tiene como conjunto solución todos los pares ordenados (x,y), que satisfacen la ecuación, donde x y y son números reales.

Ejemplo: Verifica si los pares ordenados $(1;-4)$, $\left(2,-\frac{10}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, Son soluciones de la ecuación: $2x-3y-14=0$

Solución

Para $(1;-4)$

$$\begin{aligned} 2x-3y-14 &= 0 \\ 2(1)-3(-4)-14 &= 0 \\ 2+12-14 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto $(1;-4)$es solución.

Para $(2;-\frac{10}{3})$

$$\begin{aligned} 2x-3y-14 &= 0 \\ 2(2)-3(-\tfrac{10}{3})-14 &= 0 \\ 4+10-14 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto $(2;-\frac{10}{3})$es solución.

Para $(\frac{1}{2};-\frac{3}{4})$

$$\begin{aligned} 2x-3y-14 &= 0 \\ 2(\tfrac{1}{2})-3(-\tfrac{3}{4})-14 &= 0 \\ 1+\tfrac{9}{4}-14 &= 0 \\ -\tfrac{43}{4} &\neq 0 \end{aligned}$$

Por tanto $(2;-\frac{10}{3})$ no es solución.

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

Se ha visto que el conjunto solución de la ecuación $Ax+By+C=0$, son todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación.

En un sistema de dos ecuaciones con dos variables, que tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y &= c_1 \\ a_2x+b_2y &= c_2 \end{cases}$$

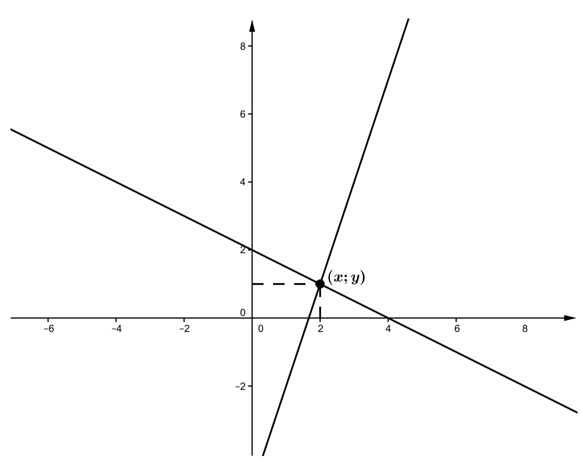
El conjunto solución lo forman todos los pares ordenados que satisfacen ambas ecuaciones, es decir:$\{(x,y)|a_1+b_1y=c_1\}\cap\{(x,y)|a_2+b_2y=c_2\}$

Cada ecuación representa una recta en el plano, entonces, se pueden presentar tres casos:

I. Las rectas se intersecan en un punto. Las rectas sólo coinciden en un punto, por tanto, se dice que el sistema tiene una solución.

Ejemplo

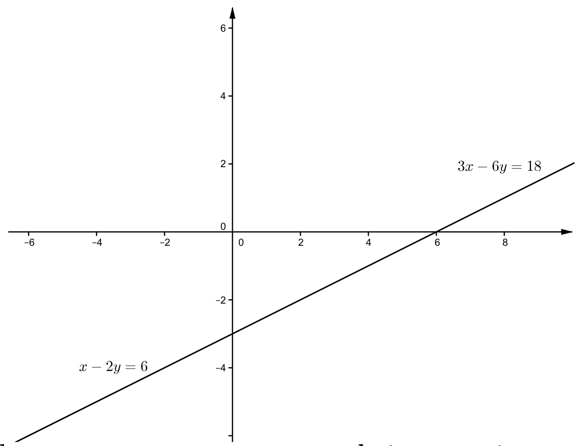
$$\begin{cases} x+2y &= 4 \\ 3x-y &= 5 \end{cases}$$



II. Las rectas son coincidentes. Dos ecuaciones representan rectas coincidentes si al multiplicar una de ellas por un número real k, se obtiene la otra.
En un sistema de rectas coincidentes el conjunto solución es infi nito, es decir, el conjunto solución son todos los puntos de las rectas.

Ejemplo

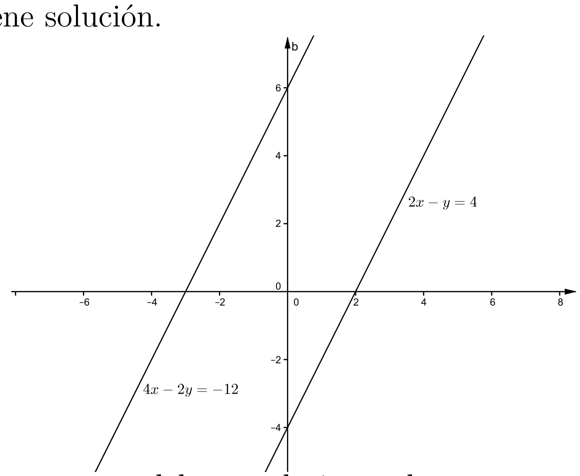
$$\begin{cases} x - 2y &= 6 \\ 3x - 6y &= 18 \end{cases}$$



Las rectas coinciden en todos sus puntos, por tanto, el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones. Se observa que si multiplicamos la ecuación $x - 2y = 6$, por 3, se obtiene la otra ecuación.

III. Las rectas son paralelas. En este caso, las rectas no tienen ningún punto en común, por tanto, el sistema no tiene solución.

Ejemplo
$$\begin{cases} 2x - y &= 4 \\ 4x - 2y &= -12 \end{cases}$$



Al graficar las rectas se observa que son paralelas, es decir, no hay un punto común, por consiguiente no hay solución, entonces se dice que el conjunto solución es vacío.

Métodos de solución

Hasta ahora se ha visto cómo resolver de forma gráfica un sistema de ecuaciones con dos variables, sin embargo, este método en algunas ocasiones puede ser poco preciso, por lo que existen procedimientos algebraicos y que además de ser prácticos resultan exactos.

Método de Sustitución

Este método consiste en despejar una de las variables de cualquiera de las dos ecuaciones y sustituir dicho despeje en la ecuación restante, así resulta una ecuación de primer grado, la cual se resuelve para obtener el valor de una de las variables. Este primer valor se sustituye en el despeje para determinar el valor de la variable que falta.

<u>Ejemplo</u>

Determina los valores de x y y en el sistema: $\begin{cases} 3x - 4y &= -11 \\ 5x + 3y &= 1 \end{cases}$

Solución

En este ejemplo se despeja x de la primera ecuación.

$$3x - 4y = -11 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} 3x = 4y - 11 \\ x = \frac{4y-11}{3} \end{array}$$

Se sustituye el despeje en la otra ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$5x + 3y = 1 \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} 5\left(\tfrac{4y-11}{3}\right) + 3y &= 1 \qquad \text{Se multiplica por 3} \\ 5(4y-11) + 9y &= 3 \\ 20y - 55 + 9y &= 3 \\ 20y + 9y &= 3+55 \\ 29y &= 58 \\ y &= \tfrac{58}{29} \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Se sustituye el valor de $y = 2$ en el despeje $x = \frac{4y-11}{3}$

$$x = \frac{4(2)-11}{3} = \frac{8-11}{2} = \frac{-3}{3} = -1$$

Por tanto los valores son: $\begin{cases} x &= -1 \\ y &= 2 \end{cases}$

Método de Igualación

En este método se elige una variable, la cual se despeja de ambas ecuaciones, los despejes se igualan y se resuelve la ecuación de primer grado que resulta. Por último, el valor que se obtiene se sustituye en cualquiera de los despejes para hallar el otro valor.

Ejemplo# 2

Determina el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} 2x-3y &= 9 \\ 5x+6y &= -45 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{aligned} 2x-3y &= 9 \\ 2x &= 3y+9 \\ x &= \tfrac{3y+9}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5x+6y &= -45 \\ 5x &= -6y-45 \\ x &= \tfrac{-6y-45}{5} \end{aligned}$$

Se igualan los despejes y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$\begin{aligned} \tfrac{3y+9}{2} &= \tfrac{-6y-45}{5} \qquad \text{mcm:10} \\ 5(3y+9) &= 2(-6y-45) \\ 15y+45 &= -12y-90 \\ 15y++12y &= -90-45 \\ 27y &= -135 \\ y &= \tfrac{-135}{27} = -5 \end{aligned}$$

El valor de $y=-5$ se sustituye en cualquiera de los despejes.

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{3y+9}{2} \\ x &= \tfrac{3(-5)+9}{2} = \tfrac{-15+9}{2} \\ x &= \tfrac{-6}{2} = -3 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el punto de intersección es $(-3;-5)$

Métodos de Reducción (suma y resta)

Este método consiste en multiplicar las ecuaciones dadas por algún número, de tal forma que al sumar las ecuaciones equivalentes que resultan, una de las variables se elimina para obtener una ecuación con una incógnita, y al resolverla se determina su valor, para posteriormente sustituirla en alguna de las ecuaciones originales y así obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplo # 1

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+5y &= 19 \\ 3x-4y &= -6 \end{cases}$$

Solución

Se elige la variable a eliminar, en este ejemplo se toma x; para eliminarla se necesita que los coeficientes de x de cada ecuación sean iguales y de distinto signo. La primera ecuación se multiplica por -3 y la segunda se multiplica por 2, posteriormente se suman las ecuaciones y se resuelve la ecuación resultante.

$$\begin{cases} (2x+5y=19) & (-3) \\ (3x-4y=-6) & (2) \end{cases} \qquad \begin{array}{rrcl} -6x & -15y & = & -57 \\ 6x & -8y & = & -12) \quad (2) \\ \hline & -23y & = & -69 \\ & y & = & \frac{-69}{-23} \\ & y & = & 3 \end{array}$$

El valor de $y=3$ se sustituye en cualquiera de las ecuaciones, para obtener el valor de x.

$$\begin{array}{rrcl} 2x+5y=19 & \rightarrow \quad 2x+5(3) & = & 19 \\ & 2x+15 & = & 19 \\ & 2x & = & 19-15 \\ & 2x & = & 4 \\ & x & = & \frac{4}{2} \\ & x & = & 2 \end{array}$$

Se puede comprobar el resultado al sustituir los valores obtenidos en la otra ecuación:

$$3x-4y=-6 \rightarrow 3(2)-4(3)=-6 \rightarrow 6-12=-6 \rightarrow -6=-6$$

Por tanto, la solución del sistema es:$x=2, y=3$

Ejercicios propuestos

Resuelve los siguientes sistemas.

1. $\begin{cases} x+y & = & 4 \\ x-y & = & 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+2y & = & 0 \\ x-y & = & -12 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5m+n & = & -1 \\ 3m+2n & = & 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x-2y & = & 2 \\ 7x+6y & = & 38 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x+2y & = & -3 \\ 2x-3y & = & -8 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5a+3b & = & 21 \\ -2a+4b & = & 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x-4y & = & -26 \\ 2x-3y & = & -19 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x-y & = & -5 \\ 5x+7y & = & 9 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4u+7v & = & -19 \\ 5u-3v & = & 35 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x-4y & = & -7 \\ -5x+6y & = & 13 \end{cases}$

Resolución de problemas

Ejemplo # 1

En una tienda departamental ponen en oferta camisas y pantalones que están fuera de temporada. El primer día se vendieron cinco pantalones y siete camisas, para totalizar \$1 060, el segundo día de ventas se invirtieron las cantidades y se ganaron \$1 100. ¿Cuál fue el precio de un pantalón y de una camisa?

Solución

Datos:

Se plantea con dos variables los precios de los artículos:

precio de un pantalón$\rightarrow x$

precio de una camisa$\rightarrow y$

$$\begin{cases} 5x+7y &= 1060 \\ 7x+5y &= 1100 \end{cases}$$

Esta ecuación se resuelve por cualquiera de los métodos anteriores, en este caso por el de reducción:

$$\begin{array}{rrcll} 5x & +7y & = & 1060 & \bullet(-7) \\ 7x & +5y & = & 1100 & \bullet(5) \\ \hline -35x & -49y & = & -7420 & \\ 35x & +25y & = & 5500 & \\ \hline & -24y & = & -1920 & \\ & y & = & \frac{-1920}{-24} = 80 & \end{array}$$

Se sustituye y = 80 en cualquiera de las ecuaciones originales y se obtiene x

$$\begin{array}{rrcl} 5x & +7yy & = & 1060 \\ 5x & +7(80) & = & 1060 \\ 5x & +560 & = & 1060 \\ & x & = & \frac{1060-560}{5} = 100 \end{array}$$

Por tanto, el precio de un pantalón es de \$100 y el de una camisa de \$80.

Ejemplo # 2

El triplo del menor de dos números excede en 5 unidades al duplo del mayor. Si se divide la mitad del mayor entre la tercera parte del menor, el cociente es 2.Halla los números.

Solución

Datos:

Número mayor$\rightarrow a$

Número menor$\rightarrow b$

$$\text{I)}\,3b-2a=5$$

$$\text{II)}\ \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{3}}=2\rightarrow \frac{a}{2}=\frac{2b}{3}$$

Trabajando en la ecuación II)

$$\text{II)}\ \frac{a}{2} = \frac{2b}{3} \rightarrow 3a = 4b \rightarrow 4b - 3a = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{rrcll} 3b & -2a & = & 5 & \bullet(3) \\ 4b & -3a & = & 0 & \bullet(-2) \\ \hline 9b & -6a & = & 15 & \\ -8b & +6a & = & 0 & \\ \hline & b & = & 15 & \end{array}$$

Hallamos el valor de a

$$\begin{array}{rrcl} 3(15) & -2a & = & 5 \\ 45 & -2a & = & 5 \\ & -2a & = & 5-45 \\ & a & = & \frac{-40}{-2} \\ & a & = & 20 \end{array}$$

Rta: El número mayor es 20 y el menor es 15.

Ejemplo # 3

Dos corredores parten de un mismo lugar corriendo a velocidad constante. Si hubieran corrido en el mismo sentido , a los 20 minutos la diferencia enre ambos hubiera sido de $200m$, pero si hubieran corrido en sentidos opuestos, la diferencia hubiera sido de $3000m$. ¿Cuál es la velocidad de cada uno?

Solución

Datos:

Velocidad del primer corredor$\rightarrow x$

Velocidad del segundo corredor$\rightarrow y$

Como la velocidad es constante la fórmula de la velocidad es $v = \frac{d}{t}$, en que $d = v \bullet t$.

$$\begin{array}{rrcll} I) & 20x - 20y & = & 200 & \div(20) \\ II) & 20x + 20y & = & 3000 & \div(20) \\ \hline I) & x - y & = & 10 & \\ II) & x + y & = & 150 & \\ \hline & 2x & = & 160 & \\ & x & = & \frac{160}{2} = 80 & \end{array}$$

Calculamos el valor de y

$$\begin{array}{rrcl} x & +y & = & 150 \\ 80 & +y & = & 150 \\ & y & = & 150-80 \\ & y & = & 70 \end{array}$$

Rta: Las velocidades de los corredores son de $80m/min$ y de $70m/min$, respectivamente.

Problemas propuestos

1. En un parque de diversiones 6 entradas de adulto y 8 de niño cuestan \$880 y 4 entradas de adulto y 5 de niño, \$570,¿cuál es el precio de entrada por un adulto y por un niño?

2. Una colección de monedas antiguas de \$5 y \$10, suman la cantidad de \$85. Si hay 12 monedas en total, ¿cuántas monedas de \$10 hay?

3. El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm, cada lado igual excede en 9 cm al largo de la base. Determina las dimensiones del triángulo.

4. Una agenda electrónica y un traductor cuestan \$1 300. Si la agenda electrónica tiene un costo de \$200 más que el traductor, ¿cuánto cuesta cada artículo?

5. El hermano de Antonio es 3 veces más grande que él, hace 3 años su hermano era 6 veces más grande que Antonio, ¿cuáles son sus edades actualmente?

6. Carlos y Gabriel fueron al supermercado a comprar lo necesario para una reunión con amigos del colegio, llevaban un total de \$500 para gastar. Carlos gastó dos terceras partes de su dinero, mientras que Gabriel tres quintas partes, regresaron a casa con un total de \$180, ¿cuánto llevaba cada uno al ir al supermercado?

7. Una lancha viajó corriente arriba 36 km en 4 horas. Si la corriente hubiese sido del cuádruplo, el viaje lo hubiera hecho en 6 horas, ¿cuál es la rapidez de la lancha y de la corriente?

8. Un granjero posee cierta cantidad de animales, entre gallinas y borregos, de tal forma que al sumar el número de cabezas el resultado es 44 y la suma de las patas es 126. ¿Cuántas gallinas y cuántos borregos tiene?

9. El mismo granjero al comprar los borregos y las gallinas pagó un total de \$6 450. Después y al mismo precio, adquirió 10 borregos y 14 gallinas, por los cuales pagó \$3 420, ¿cuál es el costo de cada borrego y cada gallina?

10. ¿Cuántos litros de una solución al 6% y cuántos de otra al 30% se deben mezclar para obtener 50 litros de una nueva solución al 12%?