ENCUENTRO # 21
TEMA: Ecuaciones con radicales..

CONTENIDOS:

1. Ecuaciones con radicales.

Ejercicio Reto

1. Si x_1, x_2 son raíces de la ecuación $3x^2 + x - 5 = 0$, hallar: $Q = \frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2}$.
   A)$-\frac{4}{3}$ B)$-\frac{13}{9}$ C)-4 D)$-\frac{21}{4}$ E)-6

2. Si $A = \sqrt{\frac{\sqrt{2^{-1} \bullet 2^{-1} \bullet 2^{-1} \bullet 2^{-1}}}{\sqrt{3^{-1} \bullet 3^{-1} \bullet 3^{-1} \bullet 3^{-1}}}}$, entonces el valor de A^4 es:
   A)$\frac{2}{3}$ B)$\frac{4}{9}$ C)$\frac{22}{3}$ D)$\frac{3}{2}$ E)$\frac{81}{16}$

Ecuaiones con radicales
Las ecuaciones radicales son aquellas que tienen la variable bajo el signo radical.
Ejemplo:

$$\sqrt{7x - 12} + \sqrt{13 - 3x} = 0 \qquad \sqrt{x + 7} + x = 5 \qquad \sqrt{3x + 1} - \sqrt{7x - 2} = 0$$

En este tipo de ecuaciones se recomienda despejar de la expresión un radical, que se eleva al cuadrado la igualdad para que se genere una ecuación de primero o segundo grado; en caso de que existan dos o más radicales, se repite lo anterior.

Algoritmo para resolver una ecuación con radicales

1. Aislar el radical.

2. Racionalizar (elevar ambos miembros al índice de la raíz).
   NOTA: los pasos anteriores se repiten hasta que se eliminen por completo los radicales.

3. Resolver la ecuación obtenida (lienal o cuadrática).

4. Comprobar.

Ejemplo # 1

Halla el conjunto solución de: $\sqrt{x-5}-4=0$

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-5}-4 &= 0 \\
\sqrt{x-5} &= 4 && \text{aislar el radical} \\
\left(\sqrt{x-5}\right)^2 &= (4)^2 && \text{Elevar ambos miembros al cuadrado} \\
x-5 &= 16 && \text{resolver la ecuación lineal} \\
x &= 16+5 \\
x &= 21
\end{aligned}$$

Comprobación: para $x=21$

MI: $\sqrt{21-5}-4$ MI:0

$\sqrt{16}-15$ MI=MD

$4-4=0$

Por tanto, $S=\{21\}$

Ejemplo # 2

Resuelve: $\sqrt{24-5x}-x=0$

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{24-5x}-x &= 0 \\
\sqrt{24-5x} &= x \\
\left(\sqrt{24-5x}\right)^2 &= (x)^2 \\
24-5x &= x^2 \\
x^2+5x-24 &= 0 \\
(x+8)(x-3) &= 0
\end{aligned}$$

$x_1=-8 \quad x_2=3$

Comprobación: Para $x=3$

MI: $\sqrt{24-5(3)}-(3)$ MD:0

$\sqrt{24-15}-3$

$\sqrt{9}-3$

$3-3$

0

Comprobación: Para $x_1=-8$

MI: $\sqrt{24-5(-8)}-(-8)$ MD:0

$\sqrt{24+40}+8$

$\sqrt{64}+8$

$8+8$

16

MI $\neq$ MD

MI = MD, por tanto $x=3$ es solución de la ecuación.

$S=\{3\}$

Ejemplo # 3

Rsuelve la siguiente ecuación:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1}=4$$

Solución

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1} &=& 4 & \\
\sqrt{x+3} &=& 4-\sqrt{5x-1} & \text{aislar el radical} \\
\left(\sqrt{x+3}\right)^2 &=& \left(4-\sqrt{5x-1}\right) & \text{elevar ambos miembros al cuadrado} \\
x+3 &=& 16-8\sqrt{5x-1}+5x-1 & \\
x+3-5x+1-16 &=& -8\sqrt{5x-1} & \text{aislamos radical} \\
-4x-12 &=& -8\sqrt{5x-1} & \text{Reducir términos semejantes} \\
-4x-12 &=& -8\sqrt{5x-1} & \text{Se divide la ecaución por } (-4). \\
x+3 &=& 2\sqrt{5x-1} & \\
(x+3)^2 &=& \left(2\sqrt{5x-1}\right)^2 & \text{Elevar ambos miembros al cuadrado} \\
x^2+6x+9 &=& 4(5x-1) & \text{ecuación cuadrática} \\
x^2+6x+9 &=& 20x-4 & \\
x^2+6x+9-20x+4 &=& 0 & \\
x^2-14x+13 &=& 0 & \\
(x-13)(x-1) &=& 0 &
\end{array}$$

$x_1 = 13 \quad x_2 = 1$

Se sustituyen los valores que se obtienen en la ecuación dada; si la igualdad no se cumple o se obtienen radicandos negativos, entonces la solución no se admite.

Comprobación: Par $x = 13$

MI: $\sqrt{13+3}+\sqrt{5(13)-1}$ MD:4

$=\sqrt{16}+\sqrt{64}$

$=4+8$

12

MI≠MD

Por tanto $x = 13$ no es solución de la ecuación.

Comprobación: Par $x = 1$

MI: $\sqrt{1+3}+\sqrt{5(1)-1}$ MD:4

$=\sqrt{4}+\sqrt{4}$

$=2+2$

4

MI=MD

Por tanto $x = 1$ es solución de la ecuación.

$S = \{1\}$

Ejemplo # 4

Determina los valores de la ecuación:

$$\sqrt{x-7}+\sqrt{x}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-7}+\sqrt{x} &= \frac{21}{\sqrt{x-7}} \qquad\qquad \text{mcm:}\sqrt{x-7}\\
x-7+(\sqrt{x-7})(\sqrt{x}) &= 21\\
\sqrt{x(x-7)} &= 21-x+7\\
\sqrt{x^2-7x} &= 28-x\\
\left(\sqrt{x^2-7x}\right)^2 &= (28-x)^2\\
x^2-7x &= 784-56x+x^2\\
-7x &= 784-56x\\
-7x+56x &= 784\\
49x &= 784\\
x &= \frac{784}{49}\\
x &= 16
\end{aligned}$$

Comprobación: para $x=16$

MI:	$\sqrt{x-7}+\sqrt{x}$	MD: $\frac{21}{\sqrt{x-7}}$
	$\sqrt{16-7}+\sqrt{16}$	MD: $\frac{21}{\sqrt{16-7}}$
	$\sqrt{9}+\sqrt{16}$	MD: $\frac{21}{\sqrt{9}}$
	$3+4$	MD: $\frac{21}{3}$
	7	MD: 7

Por tanto $x=16$ es solución de la ecuación, $S=\{16\}$

Ejercicios Propuestos

1. $\sqrt{x}-5=2$
2. $\sqrt{1-x}=3$
3. $\sqrt{2x-4}-3=0$
4. $\sqrt{9-x}=x-3$
5. $7=x+\sqrt{x-1}$
6. $\sqrt{2x+5}-x=1$
7. $2x=5+\sqrt{4-x}$
8. $\sqrt{x+2}+x=10$
9. $\sqrt{4x+13}+2x=1$
10. $\sqrt{3+x}+\sqrt{2x-1}=3$
11. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$
12. $\sqrt{x+3}-\sqrt{8x+1}=-1$
13. $2+4\sqrt{x}=\sqrt{16x+5}$
14. $\sqrt{3x+6}-\sqrt{x+3}=1$
15. $\sqrt{x+1}=\sqrt{4x-3}-1$
16. $\sqrt{2-x}+\sqrt{11+x}=5$

17. $1 = \sqrt{1 - \sqrt{4a^2 - 7a^4}} + a$

18. $\sqrt{2 + \sqrt{x}} + \sqrt{2 - \sqrt{x}} = \sqrt{x}$

19. $\sqrt{a - 1} + \sqrt{a(2 + \frac{5}{a} + \frac{1}{a})} = 6$

20. $x^2 + x + 2 = \sqrt{2}\sqrt{x^3 + x^2 + 2x + 4}$

21. $\sqrt{2a + 1} + \sqrt{a - 3} = 2\sqrt{a}$

22. $\sqrt{9x + 7} - \sqrt{2a - 7} = \sqrt{a}$