ENCUENTRO # 20
TEMA: Ecuaciones fraccionarias. Resolución de problemas.

CONTENIDOS:

1. Ecuaciones fraccionarias.

2. Resolución de problemas que conducen ecuaciones fraccionarias.

Ejercicio Reto

1. ¿Cuántos segundos hay en la mitad de la tercera parte de un cuarto de hora?
A)100 B)120 C)600 D)300 E)150

2. En la suma N y P representan dígitos diferentes, ¿cuánto es la suma de $N + P$?

$$\begin{array}{cccc} & 3 & N & P \\ + & & N & P \\ \hline & 4 & 7 & 0 \end{array}$$

A)12 B)13 C)10 D)15 D)17

1. Ecuaciones fraccionarias

Definición

Ecuaciones fraccionarias: es la ecuación que contiene fracciones algebraicas, es decir, donde la variable aparece en los denominadores de las fracciones.
Ejemplos:

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1} \qquad \frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x-1} = 0 \qquad \frac{1}{x-3} = 1 - \frac{2x-7}{x-3}$$

Para resolver una ecuación fraccionaria es necesario eliminar sus denominadores para transformarla en otra mas sencilla.
En este proceso hay que tener en presente que se puede introducir raíces extrañas, es decir, soluciones de la ecuación transformada que no son soluciones de la original, de ahí la necesidad de que sean comprobadas obligatoriamente.
¿Cómo se resuelve una ecuación fraccionaria?
A continuación se presentará el algoritmo para resolver la ecuaciones fraccionarias.

Ejemplo #1

Determina el conjunto solución de:

$$\frac{3}{x-1}=\frac{6}{x^2-1}$$

Solución

$\frac{3}{x-1}=\frac{6}{x^2-1}$

$\frac{3}{x-1}=\frac{6}{(x+1)(x-1)}$ mcm:$(x+1)(x-1)$

$3(x+1)=6$

$3x+3=6$

$3x=6-3$

$x=\frac{3}{3}=1$

Comprobación Para $x=1$

MI:$\frac{3}{1-1}=\frac{3}{0}$ MD:$\frac{6}{(1)^2-1}=\frac{6}{0}$

Como la división por cero no esta definida, la igualadad no se puede establecer y por lo tanto $x=1$ no es solución.

Respuesta: $S=\{\}$

Algoritmo para resolver un ecuación fraccionaria

- Hallar el mcm entre los denominadores.
- Multiplicar toda la ecuación por el mcm (esto se hace con el fin de eliminar los denominadores).
- Resolver la ecuación obtenida (puede ser una ecuación lineal o ecuación cuadrática).
- Comprobar los resultados obtenidos en la ecuación original para verificar que se cumple la igualadad

Ejemplo # 2

¿Para qué valores de la variable se cumple la siguiente igualdad?

$$\frac{3}{2(x+1)}+\frac{5}{4}=\frac{15}{8}-\frac{x}{x+1}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2(x+1)}+\frac{5}{4} &= \frac{15}{8}-\frac{x}{x+1} && \text{mcm:}8(x+1)\\
4\bullet 3+5\bullet 2(x+1) &= 15(x+1)-8x\\
12+10x+10 &= 15x+15-8x && \text{ecuación lineal.}\\
10x-15x+8x &= 15-12-10\\
3x &= -7\\
x &= \frac{-7}{3}
\end{aligned}$$

Comprobación: Para $x=\frac{-7}{3}$

MI: $\frac{3}{2(\frac{-7}{3}+1)}+\frac{5}{4}=\frac{3}{2(-\frac{4}{3})}+\frac{5}{4}$
$=\frac{3}{-\frac{8}{3}}+\frac{5}{4}=-\frac{9}{8}+\frac{5}{4}=\frac{1}{8}$

MD: $\frac{15}{8}-\frac{\frac{-7}{3}}{\frac{-7}{3}+1}=\frac{\frac{-7}{3}}{\frac{-4}{3}}$
$=\frac{15}{8}-\frac{7}{4}=\frac{15-14}{8}=\frac{1}{8}$

Por tanto $MI=MD$ Respuesta: $S=\{\frac{-7}{3}\}$

Ejemplo # 3

Halla los valores para los cuales la igualdad tiene sentido.

$$\frac{3}{x-5}+\frac{x^2+7}{x^2-2x-15}=-\frac{2}{x+3}$$

Solución

$$\begin{array}{rcll}
\frac{3}{x-5}+\frac{x^2+7}{x^2-2x-15} & = & -\frac{2}{x+3} & \text{Se factoriza las expresiones se simplifica si es posible.}\\
\frac{3}{x-5}+\frac{x^2+7}{(x-5)(x+3)} & = & -\frac{2}{x+3} & \text{mcm: } (x-5)(x+3)\\
3(x+3)+x^2+7 & = & -2(x-5) & \text{ecuación cuadrática.}\\
3x+9+x^2+7 & = & -2x+10 & \\
x^2+3x+2x+9+7-10 & = & 0 & \\
x^2+5x+6 & = & 0 & \\
(x+3)(x+2) & = & 0 & \\
x_1=-3 \;\; x_2=-2 & & &
\end{array}$$

Comprobación: Para $x=-3$

MI: $\frac{3}{-3-5}+\frac{(-3)^2+7}{(-3)^2-2(-3)-15}$

$=\frac{3}{-8}+\frac{9+7}{9+6-15}=-\frac{3}{8}+\frac{16}{0}$ MD: $-\frac{2}{-3+3}=-\frac{2}{0}$

Como $\frac{16}{0}$ no esta definido, $x=-3$ no es solución.

MI: $\frac{3}{-2-5}+\frac{(-2)^2+7}{(-2)^2-2(-2)-15}$

$=\frac{3}{-7}+\frac{9+7}{4+4-15}=-\frac{3}{7}+\frac{11}{-7}=-2$ MD: $-\frac{2}{-2+3}=-\frac{2}{1}=-2$

Por tanto, Respuesta $S=\{-2\}$

Ejercicios Propuestos

Resuelve:

1. $\frac{1}{3x-3}+\frac{1}{4x-4}=\frac{1}{12x-12}$
2. $\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{2x-2}=-\frac{3}{2x+2}$
3. $\frac{2}{3}-\frac{6x^2}{9x^2-1}=\frac{2}{3x-1}$
4. $\frac{1}{x}=\frac{3x-1}{x^2-x}-\frac{2}{x-1}$
5. $\frac{x(5x-27)}{5x+3}-\frac{1}{x}=x-6$
6. $\frac{3x-4}{x^2-3x}-\frac{2}{x-3}=\frac{1}{x}$
7. $\frac{1}{a^2+3a-28}-\frac{1}{a^2+12a+35}=\frac{3}{a^2+a-20}$
8. $\frac{2(x+2)}{x-2}+\frac{3((x-2)}{2x+3}=\frac{x^2-52}{2x^2-x-6}$
9. $\frac{x-2}{x^2+8x+7}=\frac{2x-5}{x^2-49}-\frac{x-2}{x^2-6x-7}$
10. $\frac{(2x-1)^2}{x^2+4x+4}=\frac{8x-4}{x+2}-3$
11. $\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x+5}=\frac{24}{x^2+2x-15}$
12. $\frac{2x-3}{3}-\frac{x}{x+3}=\frac{2x}{12}$
13. $\frac{x-1}{x+1}=\frac{2x+9}{x+3}-\frac{x+1}{x-1}$
14. $\frac{x-2}{x^2-x-6}=\frac{x}{x^2-4}+\frac{3}{2x+4}$
15. $\frac{x+7}{3x-3}-\frac{x+3}{x+1}=\frac{4}{3}$
16. $\frac{x+2}{x-2}-\frac{2}{x-5}=\frac{2x}{x^2-7x+10}$

17. $\frac{3x-1}{3x-2} - \frac{2x-3}{9x-12x+42} = 1$

18. $\frac{3a^2-2}{2a-4} + \frac{5}{2-a} = \frac{a}{2}$

19. $\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{2x-10}{2x+4} + \frac{x-2}{x^2-x-6}$

20. $\frac{3}{x-4} + \frac{7}{x+6} = \frac{80}{x^2+2x-24}$

21. $\frac{2x-3}{x-1} - 1 = x + \frac{4x+4}{1+x}$

2. Problemas que se resuelve mediante ecuaciones fraccionarias

Ejemplo # 1 Dos llaves juntas llenan una piscina en 2,0 horas. La primera llave lo hace por sí sola en 3,0 h menos que la segunda.
¿ Cuántas horas tarda cada una por separado para llenar la piscina?

Solución

Llaves	Tiempo	Parte que llena en 1 hora
Juntas	2	$\frac{1}{2}$
A	$x-3$	$\frac{1}{x-3}$
B	x	$\frac{1}{x}$

De ahi se obtiene: $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

Se resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{x-3} + \tfrac{1}{x} &= \tfrac{1}{2} && \text{mcm: } 2x(x-3)\\
2x + 2(x-3) &= x(x-3)\\
2x + 2x - 6 &= x^2 - 3x && \text{ecuación cuadrática}\\
x^2 - 7x + 6 &= 0\\
(x-6)(x-1) &= 0
\end{aligned}$$

$x_1 = 6 \quad x_2 = 1$

Comprobación: Para $x = 6$

MI: $\frac{1}{6-3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ MD: $\frac{1}{2}$

$MI = MD$, por tanto $x = 6$ es solución. Comprobación: Para $x = 1$

MI: $\frac{1}{1-3} + \frac{1}{1} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ MD: $\frac{1}{2}$

$MI = MD$, por tanto $x = 1$ es solución de la ecuación, pero no es posible porque no tiene sentido el problema. Por tanto la llave B se demora 6 horas y la llave A 3 horas.

Ejemplo # 2

Un hombre remó $3,0km$ río abajo y regresó al lugar de partida invirtiendo en total $2,0h$. La velocidad de la corriente era de $2,0Km/h$, halla la velocidad con que rema en aguas tranquilas.

Solución

Datos

Velocidad del bote: $v_b = \frac{d}{t} = x$

velocidad del río: v_r

Tiempo de ida: t_i

Tiempo de regreso: t_r

Viajes	v	d	t
ida	$x+2$	3	t_i
regreso	$x-2$	3	t_r

$t = \frac{d}{v}$

$t_i + t_r = t_{total}$

Se obtiene: $\frac{3}{x+2} + \frac{3}{x-2} = 2$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}
\tfrac{3}{x+2} + \tfrac{3}{x-2} &= 2 && \text{mcm:}(x+2)(x-2)\\
2(x-2) + 3(x+2) &= 2(x+2)(x-2)\\
3x - 6 + 3x + 6 &= 2x^2 - 8\\
2x^2 - 6x - 8 &= 0 && \text{se divide por } (2)\\
x^2 - 3x - 4 &= 0\\
(x-4)(x+1) &= 0
\end{aligned}$$

$x_1 = 4 \quad x_2 = -1$

El resultado de $x_2 = -1$ es imposible porque no hay velocidad negativa.

Respuesta: En aguas tranquilas el hombre rema con una velocidad $4km/h$.

Problemas propuestos.

1. El denominador de una fracción excede en cuatro unidades al numerador. Si se le resta 5 unidades al numerador y al denominador la fracción resulante es equivalente a $\frac{3}{5}$.¿Cuál es la fracción original?

2. La suma de dos números es 59, y si el mayor se divide entre por le menor, el cociente es 2 y el residuo 5. Halla los números.

3. La suma de dos números es 436, y si el mayor se divide por el menor el cociente es 2 y el residuo 73.Halla los números.

4. En qué tiempo harán A,B,C un trabajo juntos, si A sólo puede hacerlo en seis horas más, B en una hora más y C en el doble del tiempo.

5. Una mujer compró un cierto número de naranjas a 18 cordobas. Al día siguiente, le hubieran dado 60 naranjas más por el mismo dinero, con lo cual hubiera resultado un centavo más barata cada naranja. ¿Cuántas naranjas compró?.

6. En una fábrica se gasta diariamente, para los jornales de 42 obreros, hombres y mujeres, la cantidad de \$ 4 320. Los jornales de los obreros suman tanto como los de las obreras. Calcular el número de éstas, sabiendo que el jornal del hombre excede en 30 cordobas al de la mujer.