

## ENCUENTRO # 19

**TEMA:** Resolución de problemas que conducen a ecuaciones lineales y cuadráticas

### CONTENIDOS:

1. Resolución de problemas que conducen a ecuaciones lineales.
  - (a) Sobre números.
  - (b) Sobre edades.
  - (c) Sobre mezclas.
2. Resolución de problemas que conducen a ecuaciones cuadrática.

### Ejercicio Reto

1. Reducir  $F = \frac{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 - (x+y)}{(x+y) - \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}$   
A)  $y - 2x$     B)  $2x + y$     C)  $\frac{x-y}{x+y}$     D)  $-1$     E)  $1$
2. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación:  $|x^2 - 3x| = |x|$ ?  
A) 6    B) 4    C) 2    D) 3    E) 1

## 1.1 Problemas sobre números

↪ Para resolver los siguientes problemas debes tomar en cuenta la relación entre objetos, personas, etc., para establecer una incógnita y un modelo matemático en lenguaje algebraico que al resolverlo dé el valor de dicha incógnita y por tanto la solución del problema

*Problemas sobre números.*

### Ejemplo # 1

La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en ocho. Encuentra los números.

#### **Solución**

Datos:

número mayor:  $x - 8$

número menor:  $x$

$$\begin{aligned}x + (x + 8) &= 106 && \text{La suma de los números es 106} \\2x + 8 &= 106 \\2x &= 98 \\x &= \frac{98}{2} \\x &= 49\end{aligned}$$

### Ejemplo # 2

La suma de tres números es 200. El mayor excede al del medio en 32 y al menor en 65. Determina los números.

#### **Solución**

Datos

$$\text{Mayor: } x \quad \text{Medio: } x - 32 \quad \text{Menor: } x - 65$$

Plateamiento:

$$\begin{aligned}x + (x - 32) + (x - 65) &= 200 && \text{La suma de los tres números es 200} \\3x &= 200 - 32 + 65 \\3x &= 297 \\x &= \frac{297}{3} \\x &= 99\end{aligned}$$

Por lo tanto, los número buscados son: Mayor = 99; Medio = 67; Menor = 34

↪ Para los siguientes problemas se utiliza la notación desarrollada de un número. Por ejemplo, en el número  $372 = 3(100) + 7(10) + 2$ , 3 es el dígito de las centenas, 7 el de las decenas y 2 el de las unidades.

Ejemplo: Escribe en su forma desarrollada los siguientes números.

Número	Forma desarrollada
457	$4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$
3519	$3 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 10 \cdot 10 + 9$

### Ejemplo # 3

En un número de dos dígitos, el dígito de las decenas es 3 unidades menor que el de las unidades. Si el número excede en 6 al cuádruplo de la suma de sus dígitos, halla el número.

### Solución

Datos:

Dígito de las unidades:  $x$

Dígito de las decenas:  $x - 3$

Número:  $10(x + 3) + x$

Planteamiento

$$\begin{aligned}\text{Número} &= 4(\text{suma de los dígitos})+6 \\ 10(x - 3) + x &= 4(x + x - 3) + 6\end{aligned}$$

Se resuelve la ecuación.

$$\begin{aligned}10x - 30 + x &= 4x + 4x - 12 + 6 \\ 10x + x - 4x - 4x &= -12 + 6 + 30 \\ 3x &= 24 \\ x &= 8\end{aligned}$$

El dígito de las unidades es 8 y el de las decenas es 5, por tanto, el número es 58.

### Ejemplo # 4

La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 9. Si el número se divide por el dígito de las decenas, el cociente es 12. Encuentra el número.

### Solución

Datos

Dígito de las unidades:  $x$

Dígito de las decenas:  $9 - x$

Número:  $10(9 - x) + x$

Planteamiento

$$\begin{aligned}\frac{\text{Número}}{\text{Dígito de las decenas}} &= 12 \\ \frac{10(9-x)+x}{9-x} &= 12\end{aligned}$$

Resolviendo

$$\begin{aligned}10(9 - x) + x &= 12(9 - x) \\ 90 - 10x + x &= 108 - 12x \\ -10x + x + 12x &= 1108 - 90 \\ 3x &= 18 \\ x &= 6\end{aligned}$$

El dígito de las unidades es 6 y el de las decenas es 3, por tanto, el número es 36.

---

## Ejercicios Propuestos

1. La suma de tres números enteros consecutivos es 312. Encuentra dichos números.
2. La diferencia de dos números es 17 y la suma de ambos es 451. Determina los números.
3. La suma de tres números enteros pares consecutivos es 276. Determina los números.
4. La suma de tres números enteros impares consecutivos es 45. Encuentra los números.
5. La diferencia de dos números es 36 y un medio del mayor excede en dos al menor. Determina los números.
6. La diferencia de dos números es 42 y los dos quintos del mayor equivalen al menor. ¿Cuáles son los números?
7. Un número excede en seis a otro y el doble del mayor equivale al triple del menor. Encuentra los números.
8. Un número excede en 4 a otro y la tercera parte del mayor equivale a la mitad del menor. Determina los números.
9. El exceso de un número sobre 20 es igual a las tres cuartas partes del mismo número. ¿Cuál es el número?
10. El exceso de 30 sobre un número es igual a las dos terceras partes del número, más 10 unidades. ¿Cuál es el número?
11. La suma de dos números es 10 y la diferencia de sus cuadrados es 40. ¿Cuáles son los números?
12. La suma de dos números y la diferencia de sus cuadrados es 11. ¿Cuáles son los números?
13. El cuadrado del exceso de 12 sobre un número, menos la mitad del número, es igual al cuadrado del número, menos los trece medios del número. ¿Cuál es el número?
14. Un número es el doble de otro, si ambos se aumentan en 6, el triple del mayor equivale a cinco veces el menor. Encuentra los números.

- 
15. Un número es la tercera parte de otro, si ambos se aumentan en 10, el mayor será el doble del menor. Determina los números.
  16. La suma de tres números es 45, el mayor excede en 5 al mediano y en 10 al menor. Encuentra los números.
  17. La suma de dos números es 60 y el mayor equivale cinco veces el menor aumentado en 30. Determina los números.
  18. La suma de dos números es 23 y el doble del mayor excede en 6 al triple del menor. ¿Cuáles son los números?
  19. La diferencia de dos números es 8 y si se divide el doble del mayor más dos entre el menor, se obtiene como cociente 5. Encuentra los números. Dos números están en la relación 3:4 y el mayor equivale al menor aumentado en Determina los números.
  20. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es igual a 8. Si los dígitos se invierten, el número resultante excede en 11 a las seis quintas partes del número original. ¿Cuál es el número?
  21. En un número de dos cifras, el dígito de las decenas excede en 2 al de las unidades. Si al número se resta 4, el resultado es el séxtuplo de la suma de sus dígitos. Determina el número.
  22. En un número de dos cifras el dígito de las decenas es 4 menos que el dígito de las unidades. Si los dígitos se invierten, el número resultante es el triple más 6 del número original. Encuentra el número.
  23. La suma de los dígitos de una cantidad de dos cifras es 9. Si los dígitos se invierten, el número que resulta excede en 9 al número original, ¿cuál es el número?
  24. La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede al de las unidades en 5 y las dos terceras partes de la suma de sus cifras es 6. ¿Cuál es el número?
  25. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 11. Si el número supera en 5 al triple de la suma de sus dígitos, ¿cuál es el número?
  26. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 9. Si se resta 18 al número formado al invertir el orden de los dígitos del número original, el resultado es la mitad del número original, determina el número.

27. En una cantidad de dos dígitos, el número que ocupa el lugar de las decenas es la mitad del dígito que ocupa el lugar de las unidades. El mismo número es igual a la suma de ocho veces el dígito de las decenas, más cuatro veces el de las unidades reducido en dos. ¿Cuál es la cantidad?
28. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 16 y el cociente del número original con el número que resulta al invertir los dígitos es uno, con un residuo de 18. ¿Cuál es el número?
29. En un número de dos cifras, el dígito de las unidades equivale a las  $\frac{2}{3}$  partes del dígito de las decenas. Si el número se divide entre la suma de sus dígitos, el cociente es 6 y el residuo 6, halla los números.

## 1.2 Problemas sobre edades

### Ejemplo # 1

La edad de Carla excede en 3 años a la de Daniel y el doble de la edad de Carla más 12 años equivale al triple de la de Daniel. Determina ambas edades.

### **Solución**

	Planteamiento	
	$2(\text{Edad de Carla}) + 12\text{años} = 3(\text{Edad de Daniel})$	
	$2x + 12 = 3(x - 3)$	
	Se resuelve la ecuación	
Datos:	$2x + 12 = 3(x - 3)$	
Edad de Carla: $x$	$2x + 12 = 3x - 9$	Ejercicios Propuestos
Edad de Daniel: $x - 3$	$2x - 3x = -9 - 12$	
	$-x = -21$	
	$x = 21$	
	Finalmente, la edad de Ramiro es 12 años y la de Antonio es 24.	

1. La suma de las edades de Andrés, Carlos y Rodolfo es de 90 años. La edad de Andrés excede en 4 años a la edad de Carlos y en 11 a la de Rodolfo. Determina las edades de los tres.
2. La edad de Fabiana es la tercera parte de la edad de Hilda y la edad de Cecilia es el doble de la edad de Fabiana. Si la suma de sus edades es de 72 años, determina la edad de Cecilia.

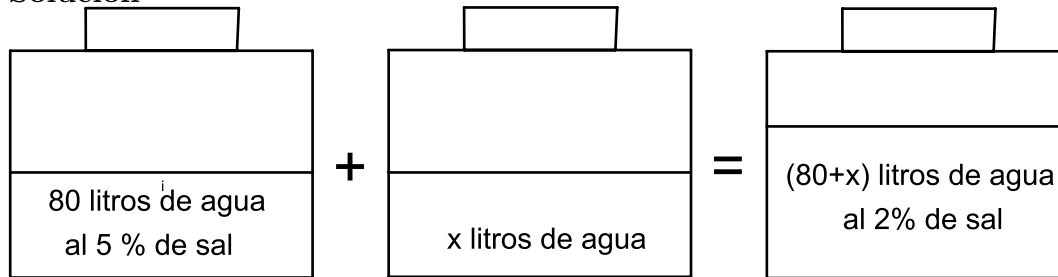
3. La edad de Tania excede en 6 a la de Luz, y la edad de María es la semisuma de las edades de Tania y Luz. Si la suma de sus edades es 42, determina las edades de Tania, Luz y María.
4. Carlos tiene 18 años y Juan 42, ¿en cuántos años la edad de Juan será el doble de la de Carlos en ese entonces? La edad de Carlos es el triple de la de Mauricio y dentro de 10 años será el doble. Determina las edades actuales de Carlos y Mauricio.
5. La edad actual de Bárbara es la mitad de la de Patricia. Si dentro de veinte años la edad de Patricia superará en 8 la de Bárbara, determina las edades actuales.
6. Ignacio tiene 70 años y Álvaro 28. ¿Hace cuánto tiempo la edad de Ignacio era el triple de la de Álvaro?
7. Hace 6 años la edad de Alejandra era el triple de la de Omar y dentro de 4 años será el doble. Determina sus edades actuales.
8. Gabriela le dice a Samanta: “Si a mi edad le restas 4 años y a la de Angélica 12 nuestras edades serían iguales, ¿cuántos años tengo si mi edad es la mitad de la de Angélica?”
9. Héctor le dice a María: “Mi abuelo es 40 años más grande que yo y un cuarto de la suma de nuestras edades equivale a mi edad. ¿Cuántos años tengo?”
10. La edad de Guillermo excede en 12 a la de Patricia y hace 7 años la edad de Patricia era  $\frac{3}{4}$  de la edad de Guillermo. Halla las edades de Guillermo y Patricia hace 7 años.
11. La edad de Camilo supera en 20 años a la de Joaquín y equivale a  $\frac{3}{2}$  de la edad de Julián. Si la suma de las edades de Camilo, Joaquín y Julián es de 60 años, ¿cuáles son sus edades?
12. La edad de Iván es  $\frac{3}{5}$  de la de Antonio y hace 5 años era la mitad, determina ambas edades.
13. La edad de Luciana son los tres quintos de la edad de Mariana, si dentro de 10 años Luciana tendrá siete décimos de la edad que tenga Mariana en ese entonces, ¿cuántos años tiene Luciana?
14. Hace 5 años la edad de Juan Carlos era dos tercios de la de Daniel y dentro de 5 años será cuatro quintos. Halla las edades actuales.

## 1.3 Problemas sobre mezclas

### Ejemplo # 1

Un tanque contiene 80 litros de agua al 5% de sal. ¿Cuánta agua deberá agregarse para tener agua al 2% de sal?

#### Solución



#### Planteamiento

Este se obtiene con la cantidad de sal de cada recipiente:

$$5\% \text{ de } 80 = 2\% \text{ de } (80 + x)$$

Resolvemos la ecuación

$$\frac{5}{100}(80) = \frac{2}{100}(80 + x)$$

$$5(80) = 2(80 + x)$$

$$400 = 160 + 2x$$

$$400 - 160 = 2x$$

$$240 = 2x$$

$$120 = x$$

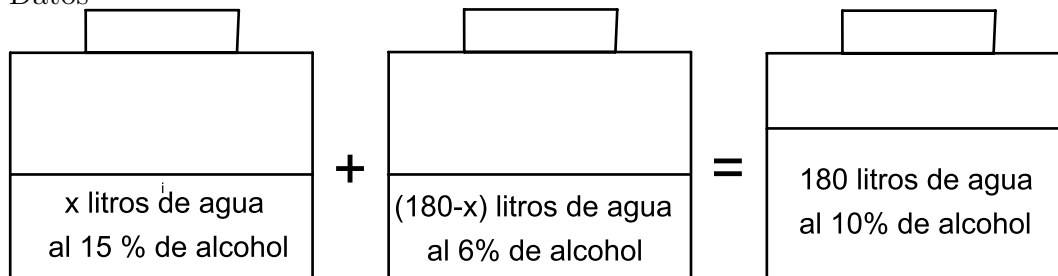
Esto significa que se deberán agregar 120 litros de agua para obtener agua al 2% de sal.

### Ejemplo # 2

¿Cuántos litros de una solución al 15% de alcohol se deben agregar a otra al 6% para obtener 180 litros de una nueva solución al 10% de alcohol?

#### Solución

Datos



#### Planteamiento

Éste se obtiene con la cantidad de alcohol de cada recipiente:



$$15\%de x + 6\%de(180 - x) = 10\%de180$$

Planteamos la ecuación y la resolvemos:

$$\frac{15}{100}x + \frac{6}{100}(180 - x) = \frac{10}{100}(180) \quad / \cdot (100)$$

$$15x + 6(180 - x) = 10(180)$$

$$15x + 1080 - 6x = 1800$$

$$9x = 720$$

$$x = 80$$

Se deben combinar 80 litros al 15% de alcohol con 100 litros al 6% para obtener 180 litros al 10% de alcohol. Ejercicios Propuestos

1. A 120 litros de agua azucarada al 3%, ¿cuánta agua se debe evaporar para aumentar su concentración a 5%?
2. A 80 litros de agua al 1.5% de sal, ¿cuánta agua deberá agregarse para disminuir su concentración al 1%?
3. ¿Cuánto ácido clorhídrico se debe agregar a 120 gr de una solución al 60% del ácido para obtener una nueva solución con 70%?
4. Si se tienen 120 litros de una solución que contiene azúcar al 5%, ¿qué cantidad de agua se debe agregar para obtener una solución al 2%?
5. De 50 litros de agua al 4% de sal, ¿qué cantidad de agua se debe evaporar para obtener una nueva solución al 5%?
6. Un radiador contiene 1.5 litros de una mezcla de agua y anticongelante. Si 30% de la mezcla es anticongelante, ¿cuántos litros de anticongelante puro se deben añadir para que en la nueva mezcla represente 50%?
7. Se tienen 18 onzas de una mezcla de agua hervida y leche de fórmula al 20%. Si se desea una mezcla al 15% de leche de fórmula, ¿cuántas onzas de agua hervida hay que agregar?
8. En una empresa que fabrica material médico se utiliza alcohol etílico al 10% para limpiar las áreas de producción. Si al almacén llega un contenedor de 20 lt con alcohol etílico al 15%, ¿qué cantidad de agua se debe agregar para poder obtener el alcohol al 10%?
9. Un farmacéutico debe preparar 75 ml de una solución con un ingrediente activo al 2%. Si sólo tiene en existencia soluciones al 4 y 1%, ¿cuánto de cada solución deberá mezclar para la elaboración de la nueva solución al 2%?

10. Se requieren 100 ml de una solución al 3.5% de alcohol, si sólo se tienen disponibles soluciones al 5 y 2%, ¿qué cantidad de cada solución deberá mezclarse para obtener la solución requerida?
11. ¿Cuántos litros de una solución de alcohol al 30% deben combinarse con otra al 3% para obtener 30 litros de una nueva solución al 12%?

## 2. Problemas que conducen a una ecuación cuadrática

Ejemplo # 1 La suma de dos números es 18 y la de sus cuadrados es 180, ¿cuáles son los números?

**Solución**

	Ecuación	
	$x^2 + (18 - x)^2 = 180$	
	$x^2 + 324 - 36x + x^2 - 180 = 0$	
Primer número: $x$	$2x^2 - 36x + 144 = 0$	Se divide entre 2
Segundo número: $18 - x$	$x^2 - 18x + 72 = 0$	Se factoriza
	$(x - 12)(x - 6) = 0$	Cada factor se iguala a cero.
	$x - 12 = 0$ o $x - 6 = 0$	
	$x = 12$ o $x = 6$	

Finalmente, tenemos que los números son 12 y 6.

Ejemplo # 2

En  $t$  segundos la altura  $h$ , en metros sobre el nivel del suelo, de un proyectil está dada por la ecuación  $h = 80t - 5t^2$ , ¿cuánto tardará el proyectil en llegar a 320 m sobre el nivel del suelo?

**Solución**

Con la ecuación  $h = 80t - 5t^2$ , se obtiene la altura del proyectil en cualquier instante. Para determinar el tiempo que tarda el proyectil en tener una altura de 320 m, este valor se evalúa en la ecuación dada, es decir:

$$h = 80t - 5t^2$$

$$320 = 80t - 5t^2$$

Se obtiene una ecuación de segundo grado, la cual se resuelve para  $t$ .

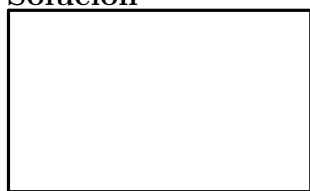
$$\begin{aligned}
 320 &= 80t - 5t^2 && \text{se iguala a cero} \\
 5t^2 - 80t + 320 &= 0 && \text{se divide entre 5} \\
 t^2 - 16t + 64 &= 0 \\
 (t - 8)^2 &= 0 && \text{se factoriza} \\
 t - 8 &= 0 \\
 t &= 8
 \end{aligned}$$

por tanto, el proyectil tardará 8 segundos en estar a 320 m sobre el nivel del suelo.

### Ejemplo # 3

Determina las dimensiones de un rectángulo, si su perímetro es de 280 m y su área es de  $4000m^2$ .

### Solución



$$\begin{aligned}
 2(\text{base}) + 2(\text{altura}) &= \text{perímetro} \\
 2x + 2(\text{altura}) &= 280 \\
 x + (\text{altura}) &= 140 \\
 \text{altura} &= 140 - x
 \end{aligned}$$

El área de un rectángulo es el producto de la base por la altura:

$$\text{Área: } x(140 - x) = 4000$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado.

$$\begin{aligned}
 x(140 - x) &= 4000 \\
 140x - x^2 - 4000 &= 0 \\
 -x^2 - 140x - 4000 &= 0 && \text{al multiplicar por } -1 \\
 x^2 + 140x + 4000 &= 0 \\
 (x - 40)(x - 100) &= 0 \\
 x - 40 = 0 & \text{ o } x - 100 = 0 \\
 x = 40 & \text{ o } x = 100
 \end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior, las dimensiones del rectángulo son 40 y 100 metros.

## Ejercicios Propuestos

- Encuentra 2 números enteros que sumen 42 y cuyo producto sea 405.
- Encuentra 2 números naturales que su producto sea 360 y el cociente del mayor entre el menor sea  $\frac{5}{2}$ .
- Un agricultor tiene necesidad de cercar  $25000m^2$  de su parcela; dicha propiedad es rectangular y colinda con un río, por lo que no necesita cercar ese lado. ¿Qué dimensiones tiene el terreno si el propietario dispone de 450 m de cerca?

- 
4. La base de un triángulo es 3 veces su altura. Su área es de  $150m^2$ , ¿cuáles son las dimensiones de la base y la altura?
  5. Encuentra la longitud de los lados de un triángulo rectángulo, cuya superficie es de  $6m^2$ , perímetro de  $12m$  e hipotenusa de  $5m$ .
  6. Se desea construir un recipiente, sin tapa, de fondo cuadrado y lados rectangulares, con una altura de 6 m, si el material para el fondo cuesta \$800 por metro cuadrado y el de los lados \$1 200, ¿cuál es el volumen que se puede obtener con \$128 000?
  7. Un productor de conservas en almíbar desea envasar su producto en una lata cilíndrica, cuya altura es de 8 centímetros y su volumen de  $128\pi cm^3$ . Encuentra el radio de la lata.
  16. Mario va a construir una caja sin tapa, cuyo volumen debe ser de  $312cm^3$ ; utilizará una lámina rectangular en la cual cortará cuadrados de 2 centímetros por lado en las esquinas. Si él sabe que la superficie total de la hoja al quitar los cuadrados es de  $256cm^2$ , ¿cuáles son las dimensiones de dicha hoja?
  8. Un famoso jugador de béisbol lanza una pelota verticalmente hacia arriba, tan fuerte como le es posible. La altura que alcanza la pelota después de  $t$  segundos la determina la ecuación  $h = 40t - 8t^2$ . ¿Cuánto tiempo le llevará a la pelota regresar al suelo?
  19. En  $t$  segundos la altura  $h$  en pies, sobre el nivel del suelo, de un proyectil está dada por la ecuación  $h = 240t - 16t^2$ , ¿cuánto tardará el proyectil en llegar a 900 ft sobre el nivel del suelo? (**Nota:** ft es la unidad de medida de pies en inglés.)