ENCUENTRO # 18
TEMA: Ecuaciones lineales y Ecuaciones Cuadráticas

CONTENIDOS:

1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita
   (a) Con signos de agrupación y productos indicados
   (b) Con valor absoluto
   (c) Con literales
2. Ecuaciones cuadráticas
   (a) Solución de una ecuación cuadrática
   (b) Fórmula general
   (c) Propiedades de las raíces

Ejercicio Reto

1. Efectúa las siguientes operaciones con radicales y simplifica el resultado.
   $\dfrac{\sqrt{a^3b}\sqrt[4]{ab^4}\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[6]{ab}}$
   A)$\sqrt{a}$ B)$\sqrt[4]{a}$ C)$(ab)^2\sqrt[4]{a}$ D)$(ab)^2\sqrt{a}$ E)$(ab)^2\sqrt[4]{b}$
2. Si $a^{x-y} = 5$, entonces $\dfrac{a^x - a^y}{a^x + a^y}$ es igual a:
   A)$\frac{1}{3}$ B)$\frac{2}{3}$ C)$\frac{2}{5}$ D)$\frac{3}{4}$ E)$\frac{5}{3}$

GENERALIDADES

Definición 1 (Igualdad)**.** *Dos cantidades son iguales o equivalentes cuanto tienen el mismo valor.*

$$(2+3)^2 = 25 \qquad 4^2 + 3^2 = 25 \qquad \sqrt{625} = 25$$

Entonces $(2+3)^2, 4^2+3^2$ y $\sqrt{625}$ son expresiones equivalentes ya que todas ellas valen 25.

Definición 2 (Ecuación)**.** *Una ecuación es una igualdad de una o varias incógnitas que se representan con letras. Las ecuaciones pueden ser fórmulas que se utilizan para encontrar una magnitud.*

La fórmula $v = \frac{d}{t}$ se utiliza para encontrar la velocidad constante de un móvil del que se conoce la distancia recorrida y el tiempo que empleó en recorrerla.
La fórmula $A = \pi r^2$ se utiliza para encontrar el área de un círculo dada la longitud de su radio.
También existen ecuaciones con expresiones algebraicas, en las que se busca el valor de una variable o representan modelos matemáticos que resuelvan algún problema de la vida real.

$x + 2 = 8 \qquad x + y = 6 \qquad x^2 - 4 = 0 \qquad \dfrac{4}{x-2} - \dfrac{2}{x^2-4} = \dfrac{5}{x+2}$

Las ecuaciones formadas de la siguiente manera:

$$1^{er} \text{ miembro} = 2^{do} \text{ miembro}$$
$$\text{Miembro Izquierdo} = \text{Miembro Derecho}$$

Solución de una ecuación. La solución o soluciones de una ecuación son los valores que hacen que la igualdad se cumpla.
Por ejemplo:

1. Para la ecuación $x + 2 = 10$, una solución es $x = 8$, ya que al sustituir con 8 a la literal x, se obtiene: $8 + 2 = 10$

2. Para la ecuación $x + y = 8$, una solución es $x = 3$, $y = 5$; porque $3 + 5 = 8$

3. Para la ecuación $x^2 - 4 =$, las soluciones son $x = 2$ y $x = -2$ porque:

$$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \qquad 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

Grado de una ecuación. El grado de una ecuación se obtiene del término de mayor grado que contenga a la incógnita.
Por ejemplo:

1. La ecuación $2x + 3 = 5$, es de primer grado, porque la incógnita tiene exponente 1

2. La ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$, es de segundo grado, porque la incógnita tiene exponente 2

3. La ecuación $x + y$, es de primer grado, porque ambas incógnitas tienen exponente 1

A las ecuaciones de primer grado se les llama lineles.

1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Estas ecuaciones se resuelven mediante la aplicación de ecuaciones equivalentes con operaciones elementales (suma, resta, multiplicación o división) a ambos miembros de la ecuación, hasta obtener el valor de la incógnita.

Ejemplo 1.1. *Encuentra el valor de x en la siguiente expresión:* $2x + 3 = 7$.

Solución: Se agrupan los términos que contienen a la incógnita en el primer miembro y las constantes en el segundo, se aplican sumas, restas, multiplicaciones o divisiones, según corresponda.

$$\begin{array}{lcrr}
2x+3 & \rightarrow & (2x+3)-3 = 7-3 & \text{Se resta 3 en ambos miembros} \\
 & & 2x = 4 & \text{Al simplificar} \\
 & & \frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(4) & \text{Se multiplica por } \frac{1}{2} \\
 & & x = 2 &
\end{array}$$

Se comprueba la solución al sustituir en la ecuación el valor de x, y se verifica la igualdad.

$$\begin{aligned}
2(2)+3 &= 7 \\
4+3 &= 7 \\
7 &= 7
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución es $x = 2$.

Ejemplo 1.2. *Encuentra el valor de la incógnita en la ecuación* $m - 25 = 3m - 5$.

Solución:

$$\begin{array}{lcr}
m-25 = 3m-5 & \rightarrow & m-3m = -5+25 \\
 & & -2m = 20 \\
 & & m = \dfrac{20}{-2} \\
 & & m = -10
\end{array}$$

Ejemplo 1.3. *¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación* $20x-14-11x = 8-6x+2$*?*

Solución:

$$20x - 11x + 6x = 8 + 2 + 14 \quad \rightarrow$$ Transponer los términos con variables para un miembro y los términos independientes para el otro

$$15x = 24 \quad \rightarrow$$ Reducir términos semejantes

$$x = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} \quad \rightarrow$$ Se despeja la variable y se calcula su valor

El conjunto solución es igual a $\{\frac{8}{5}\}$.

Teorema 1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ la ecuación $ax = b$*

a) tiene solución única, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$

b) no tiene solución, si $a = 0$ y $b \neq 0$

c) infinitas soluciones, si $a = 0$ y $b = 0$

Demostración. a) Como $a \neq 0$, entonces podemos dividir por a, ambos miembros de la ecuación

$$\begin{aligned} ax &= b \\ \frac{1}{a}(ax) &= \frac{1}{a} \cdot b \\ \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) x &= \frac{b}{a} \\ x &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Por tanto, $x = \frac{a}{b}$ es solución única.

b) Si $a = 0$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}, ax = 0$. Además $ax = b$, entonces si $b \neq 0$, no existen soluciones para $ax = b$.

c) Si $a = 0$ y $b = 0$, todo $x \in \mathbb{R}$ verifica la ecuación de $ax = b$, por lo tanto hay infinitas soluciones.

$\square$

Ejemplo 1.4. *Determina el conjunto solución de la ecuación $2x-7-5x = 11x-6-14x$.*

Solución: Al resolver la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} 2x - 7 - 5x &= 11x - 6 - 14x \\ 2x - 5x - 11x + 14x &= -6 + 7 \\ 0x &= 1 \end{aligned}$$

La ecuación no tiene soluciones (ver inciso b del teorema anterior), luego el conjunto solución es vacío.

Ejemplo 1.5. *Determina el conjunto solución de la ecuación $3y - 8 + 5y + 6 = 10y - 2 - 2y$.*

Solución:
Al resolver la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} 3y - 8 + 5y + 6 &= 10y - 2 - 2y \\ 3y + 5y - 10y + 2y &= -2 + 8 - 6 \\ 0y &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación tiene infinitas soluciones (ver inciso c del teorema anterior), luego el conjunto solución son todos los números reales.

Problemas Propuestos

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $x + 2 = 5$
2. $y - 4 = 6$
3. $8 - z = 9$
4. $10 - x = 12$
5. $2x - 3 = 5$
6. $2y + 2 = 11$
7. $9x - 6 = 18$
8. $5x + 7 = 3$
9. $1 - 4w = 9$
10. $2 - 7y = 13$
11. $8x - 6 = 6x + 4$
12. $12 + 7x = 2x + 22$
13. $9 - 8y = 27 - 2y$
14. $2z + 9 = z + 1$
15. $3w - 3 = 4w + 11$
16. $10x + 21 = 15 - 2x$
17. $21x - 3 = 3x + 6$
18. $11y - 5y + 6 = -24 - 9y$
19. $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$
20. $-9x + 9 - 12x = 4x - 13 - 5x$
21. $5y + 6y - 81 = 7y + 102 + 65y$
22. $16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - 2x$
23. $-12x - 8 - 3x + 10 = 2x - 9 + 6x$
24. $3z - 8 + 6z - 12 = z - 10 + 9z - 13$
25. $7y - 10 + 2y - 8 = 14y - 9 + 8y$
26. $x - 6 - 5x + 10x = 9x - 8 + 3x$
27. $2z - 4 - 8z + 9 = 10z - 6 + z - 12$
28. $9y - 1 - 14y + 8 = y - 9 + 15y - 1$
29. $x - 7 - 12x - 9 + 3x = 14x - 10 - x + 7$
30. $10z - 5 + 7z - 10 + 8z = 2z - 6 + 4z - 8$
31. $3x + 101 - 4x - 33 = 108 - 16x - 100$

32. $14-12x+39x-18x=239-60x-6x$
33. $-8x+48-30x-51x=3x-31x+170$
34. $7x+5-2x+9x=14x-9+2x-11x+8$
35. $3w+5-7w+9w-11w+13=16-8w$
36. $6z+12z-18-5z=-12z+4z-11+z$
37. $10x-8+3x-7+x=20x-10-6x$
38. $5x-8-8x+10-3x=9-x+6-5x-13$
39. $2y+7-8y+5-3y=14-6y-2-3y$
40. $12z-9-10z+3-8z=z-9+3z+10-10z$

1.1 Con signos de agrupación y productos indicados

Para resolver este tipo de ecuaciones se suprimen los signos de agrupación o se realizan los productos indicados y se resuelve la ecuación equivalente que se obtuvo.

Ejemplo 1.6. *Resuelve la ecuación:* $8x-(6x-9)+(3x-2)=4-(7x-8)$.

Solución. Se eliminan los signos de agrupación y se resuelve la ecuación equivalente que se obtiene:

$$\begin{aligned} 8x-(6x-9)+(3x-2)&=4-(7x-8)\\ 8x-6x+9+3x-2&=4-7x+8\\ 8x-6x+9+3x+7x&=4+8-9+2\\ 14x&=5\\ x&=\frac{5}{12} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es: $x=\frac{5}{12}$.

Ejemplo 1.7. *Encuentra el valor de la incógnita en la siguiente ecuación:*

$$7(18-x)-6(3-5x)=-(7x+9)-3(2x+5)-12.$$

Solución. Se resuelven los productos indicados y se determina el valor de x al resolver la ecuación equivalente:

$$\begin{aligned} 7(18-x)-6(3-5x)&=-(7x+9)-3(2x+5)-12\\ 126-7x-18+30x&=-7x-9-6x-15-12\\ -7x+30x+7x+6x&=-9-15-12-126+18\\ 36x&=-144\\ x&=-\frac{144}{36}=-4 \end{aligned}$$

Por consiguiente, $x=-4$.

Ejemplo 1.8. *Determina el valor de x en la siguiente ecuación:*

$$2x - \{3x - (9x + 1) - 8\} = 12x - \{9 - [3x - (5 - 2x) - 10] + 18x\}$$

Solución. Se suprimen los signos de agrupación y se resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned}
2x - \{3x - (9x + 1) - 8\} &= 12x - \{9 - [3x - (5 - 2x) - 10] + 18x\} \\
2x - \{3x - 9x - 1 - 8\} &= 12x - \{9 - [3x - 5 + 2x - 10] + 18x\} \\
2x - 3x + 9x + 1 + 8 &= 12x - \{9 - 3x + 5 - 2x + 10 + 18x\} \\
2x - 3x + 9x + 1 + 8 &= 12x - 9 + 3x - 5 + 2x - 10 - 18x \\
2x - 3x + 9x - 12x - 3x - 2x + 18x &= -9 - 5 - 10 - 1 - 8 \\
2x - 3x + 9x - 12x - 3x - 2x + 18x &= -9 - 5 - 10 - 1 - 8 \\
9x = -33 \to x &= -\frac{33}{9} = -\frac{11}{3}
\end{aligned}$$

Por consiguiente, el valor de x es: $-\frac{11}{3}$.

Ejemplo 1.9. *Determina el valor de y en la siguiente ecuación:*

$$-13y - (y - 4)^2 + 8(2y - 3) = 8 - (y - 5)(y + 5) - 10(y + 1)$$

Solución. Se realizan los productos notables, los productos indicados y se resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned}
-13y - (y - 4)^2 + 8(2y - 3) &= 8 - (y - 5)(y + 5) - 10(y + 1) \\
-13y - (y^2 - 8y + 16) + 8(2y - 3) &= 8 - (y^2 - 25) - 10(y + 1) \\
-13y - y^2 + 8y - 16 + 16y - 24 &= 8 - y^2 + 25 - 10y - 10 \\
-13y - y^2 + 8y + 16y + y^2 + 10y &= 8 + 25 - 10 + 16 + 24 \\
21y &= 63 \\
y &= \frac{63}{21} = 3
\end{aligned}$$

Problemas Propuestos

Determina el valor de la incógnita de las siguientes ecuaciones:

1. $x - (2x + 1) = 8 - (3x + 3)$
2. $15x - 20 = 6x - (x + 2) + (-x + 3)$
3. $(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6)$

4. $4(x-2)-5(2x-6)=8(x+1)-(3x-6)$

5. $4(x-2)-5(2x-6)=8(x+1)-3(2x+3)$

6. $7(3x+1)+8(2x-3)=4(3x-1)-7(x-4)$

7. $30w-(-w+6)+(-5w+4)=-(5w+6)+(-8+3w)$

8. $-\{3y+8-[-15+6y-(-3y+2)-(5y+4)]-29\}=-5$

9. $-2y-3-\{-4y+5+[-y+2-(3y-1)+2y-5]\}=-(y-4)$

10. $-2(y-1)+4\{-4(y-1)-5[y-2(4-y)+3y]-(y+1)\}=2y-(-5-y)$

11. $w-2[w+5(1-2w)+4w]-(w+3)=-w+3(w+2)+7w$

12. $x-3[2x-(x+1)+5(1-x)]=x+(3x-7)-(x+3)$

13. $7(x-4)^2-3(x+5)^2=4(x+1)(x-1)-2$

14. $5(1-x)^2-6(x^2-3x-7)=x(x-3)-2x(x+5)-2$

15. $(x+1)^3-(x-1)^3=6x(x-3)$

16. $3(x-2)^2(x+5)=3(x+1)^2(x-1)+3$

17. $(x+1)(x+2)(x-3)=(x-2)(x+1)^2$

18. $2x(x-4)-(2x+3)(x-4)=4x(2x-3)-8(1-x)^2$

19. $(3x-2)^3-(3x-4)(6x-5)-45x^2=9x^2(3x-5)-10(x+3)-2(6x-1)(6x+1)$

20. $3x-\{10x-[(3-5x)^2-8]+(5x-3)(5x+4)\}=3(6x^2-4)-9\{3x+(2x-1)(x-3)\}$

21. $12-\{6x+[3x+(x-7)(x+7)]-(2x+3)^2\}=-2x^2+5[(x+1)^2-3(x+6)]$

1.2 Con valor absoluto

En estas ecuaciones se aplica la definición del valor absoluto.

$$|a|=\begin{cases}-a & \text{si } a<0\\ a & \text{si } a\geq 0\end{cases}$$

Para resolver una ecuación con valor absoluto, se tiene que si $|x|=a$, su solución está dada por:

$$x=a \qquad\qquad ó \qquad\qquad x=-a$$

Ejemplo 1.10. *Resuelve la siguiente ecuación:* $|6 - 3x| = 9$.

Solución. Se aplica la definición y se obtienen dos ecuaciones, las cuales se resuelven por separado:

$$\begin{aligned} 6 - 3x &= 9 \\ -3x &= 9 - 6 \\ -3x &= 3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(6 - 3x) &= 9 \\ -6 + 3x &= 9 \\ 3x &= 9 + 6 \\ 3x &= 15 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Por consiguiente, las soluciones para esta ecuación son: $x = -1$ ó $x = 5$.

Ejemplo 1.11. *Encuentra el conjunto solución de:* $|3x - 1| = 2x + 5$.

Solución. Se aplica la definición y se resuelven las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 2x + 5 \\ 3x - 2x &= 5 + 1 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(3x - 1) &= 2x + 5 \\ -3x + 1 &= 2x + 5 \\ -3x - 2x &= 5 - 1 \\ -5x &= 4 \\ x &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es: $\{-\frac{4}{5}, 6\}$.

Ejercicios Propuestos

Encuentra el valor de la incógnita en las siguientes ecuaciones:

1. $|x + 1| = 8$
2. $|3 - 2y| = 5$
3. $|3m + 4| = 8$
4. $|5x - 1| = 14$
5. $|4 - 2y| = 4$
6. $|-2m - 5| = 1$
7. $|x + \frac{1}{2}| = 2$
8. $|\frac{m-1}{2m+1}| = 0$
9. $|8x + 2| = 2 - x$
10. $|2x - 5| = x + 2$
11. $|\frac{x+2}{5}| = \frac{1}{15}$

1.3 Con literales

En estas ecuaciones las incógnitas se representan con letras x, y, z, mientras que las letras a, b, c, m y n, se utilizan como constantes.

Ejemplo 1.12. *Encuentra el valor de x en la ecuación:* $8abcx - ab = 8abx + 1$.

Solución.

$$\begin{aligned}
8abcx - ab &= 8abx + 1 \\
8abcx - 8abx &= 1 + ab && \text{Se agrupan términos en } x \\
x(8abc - 8ab) &= 1 + ab && \text{Se factoriza y se despeja} \\
x &= \frac{1 + ab}{8abc - 8ab}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.13. *Determina el valor de y en la ecuación:* $a - \frac{m+n}{y} = b - \frac{m-n}{y}$

Solución.

$$\begin{aligned}
a - \frac{m+n}{y} &= b - \frac{m-n}{y} \\
y\left[a - \frac{m+n}{y}\right] &= \left[b - \frac{m-n}{y}\right] && \text{Se eliminan los denominadores} \\
ay - (m+n) &= by - (m-n) \\
ay - m - n &= by - m + n \\
ay - by &= -m + n + m + n && \text{Se agrupan términos} \\
y(a-b) &= 2n && \text{Se factoriza} \\
y &= \frac{2n}{a-b}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.14. *Resuelve la ecuación* $1 + \frac{b}{z} = \frac{b}{a} + \frac{a}{z}$*; para z.*

Solución. Se multiplica por az, para eliminar los denominadores:

$$\begin{aligned}
az\left[1 + \frac{b}{z}\right] &= \left[\frac{b}{a} + \frac{a}{z}\right] \\
az + ab &= bz + a^2 \\
az - bz &= a^2 - ab && \text{Se agrupan los términos con } z \\
z(a-b) &= a(a-b) && \text{Se factoriza en ambos miembros y se despeja } z \\
z &= \frac{a(a-b)}{a-b} = a
\end{aligned}$$

Problemas propuestos

Resuelve las siguientes ecuaciones para las incógnitas x, y ó z, según sea el caso:

1. $2b(a-x) = x(b-a) + a(x+b)$
2. $y^2 + a^2 = (a+y)^2 - a(a+1)$
3. $a(x+b) - (x+a)^2 = -x^2$
4. $a(b-y) - a(b-1) = a(ay-b)$
5. $\frac{x-m}{x-n} = \left(\frac{2x-m}{2x-n}\right)^2$
6. $\frac{x-m}{n} = 2 - \frac{x-n}{m}$
7. $\frac{x+a}{a} - \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{x+b}{b} - 2$
8. $(y-m)^2 + (m-n)^2 - (y-n)^2 = 0$
9. $(z+m)^3 + (z-m)^3 = 2(z^3 + 6m^3)$
10. $\frac{z+a}{a-b} + \frac{z-a}{a+b} = \frac{z+b}{a+b} - \frac{z-b}{a-b}$

2. Ecuaciones Cuadráticas

La ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, es una ecuación de segundo grado; al término ax^2 se le llama término cuadrático, a bx se le llama término lineal, c es el término independiente y se clasifican de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c}\text{Ecuaciones de}\\ \text{Segundo Grado}\end{array}\left\{\begin{array}{c}\text{Completas: } ax^2+bx+c=0\\ \text{Incompletas: }\left\{\begin{array}{l}\text{Mixtas: } ax^2+bx=0, \text{ con } c=0\\ \text{Puras: } ax^2+c=0, \text{ con } b=0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

2.1 Solución de una ecuación de segundo grado completa

Las ecuaciones de segundo grado tienen dos soluciones, también se denominan raíces. Estudiaremos tres métodos para resolver una ecuación de segundo grado.

2.1.1 Completación de cuadrados

En la ecuación $x^2 + bx + c$, para completar el trinomio cuadrado perfecto se suman, en ambos miembros de la igualdad el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Ejemplo 2.1. *Resuelve la ecuación* $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Solución. Se dejan los términos en x en el primer miembro de la ecuación.

$$x^2 + 4x = -3$$

$$\begin{array}{rc} \text{Se suma } \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4 \text{ en ambos miembros} & x^2 + 4x + 4 = -3 + 4 \\ \text{Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto} & (x+2)^2 = 1 \\ \text{Se extrae raíz cuadrada en ambos miembros} & x + 2 = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ \text{Se despeja la incógnita} & x = -2 \pm 1 \\ \text{de la igualdad se obtienen los valores de } x, & \end{array}$$

$$x_1 = -2 + 1 = 1 \text{ ó } x_2 = -2 - 1 = -3$$

Por lo tanto, las soluciones o raíces de la ecuación son: $x_1 = -1$ ó $x_2 = -3$.

Ejemplo 2.2. *Resuelve la ecuación* $2x^2 + 7x + 3 = 0$.

Solución. Se divide la ecución entre 2 y se completa el trinomio cuadrado perfecto,

$$x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\begin{array}{rc} & x^2 + \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2} \\ \text{Se suma } \left(\frac{\frac{7}{2}}{2}\right)^2 = \frac{49}{16} \text{ en ambos miembros} & x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} = -\frac{3}{2} + \frac{49}{16} \\ \text{Se factoriza el miembro izquierdo,} & \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \\ \text{Se aplica raíz cuadrada en ambos miembros} & x + \frac{7}{4} = \pm\frac{5}{4} \\ & x = -\frac{7}{4} \pm \frac{5}{4} \end{array}$$

Finalmente, las raíces de la ecuación son: $x_1 = -\frac{1}{2}$ ó $x_2 = -3$.

Ejemplo 2.3. *Encuentra las raíces de la ecuación* $6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0$, *con* y *como una constante.*

Solución. Se divide entre 6 y se completa el trinomio cuadrado perfecto,

$$x^2 - \frac{11}{6}xy + \frac{3}{6}y^2 = 0$$

$$
\begin{aligned}
x^2 - \frac{11}{6}xy &= -\frac{3}{6}y^2 \\
x^2 - \frac{11}{6}xy + \frac{121}{144}y^2 &= = -\frac{3}{6}y^2 + \frac{121}{144}y^2 \\
\left(x - \frac{11}{12}y\right)^2 &= \frac{49}{144}y^2 \\
x - \frac{11}{12}y &= \pm\frac{7}{12}y \\
x &= \frac{11}{12}y \pm \frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{7}{12}y + \frac{11}{12}y = \frac{3}{2}y$$

$$x_2 = -\frac{7}{12}y + \frac{11}{12}y = \frac{1}{3}y$$

.

2.1.2 Factorización de trinomios

Si un trinomio el trinomio $ax^2 + bx + c$ se factoriza de esta manera $a(x - x_1)(x - x_2)$ entonces las raíces del trinomio son iguales a x_1 y x_2.

Ejemplo 2.4. *Encuentra las soluciones de* $x^2 - 6x - 27 = 0$.

Solución. Como el trinomio $x^2 - 6x - 27$ se puede factorizar en $(x - 9)(x + 3)$, entonces las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática son: $x_1 = 9$, $x_2 = -3$.

Ejemplo 2.5. *Encuentra las soluciones de* $x^2 - 5x - 6 = 0$.

Solución. Como el trinomio $x^2 - 5x - 6$ se puede factorizar en $(x - 6)(x + 1)$, entonces las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática son: $x_1 = 6$, $x_2 = -1$.

Ejemplo 2.6. *Determina las soluciones de la ecuación* $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

Solución. Como el trinomio $3x^2 - 5x + 2$ se puede factorizar en $(3x - 2)(x - 1)$, entonces las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática son: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 1$.

Problemas Propuestos

Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado, considerando que x, y, z y w son variables y a y b constantes.

1. $x^2 + 5x + 4 = 0$
2. $6x - 27 = -x^2$
3. $x^2 + 11x + 30 = 0$
4. $y^2 + 10 = 6y$
5. $w^2 - 40 = 3w$
6. $z^2 - 30 = 13z$
7. $x^2 - 10x + 24 = 0$
8. $x^2 + 8x = 240$
9. $2x + 5 = -x^2$
10. $3x^2 = x + 2$
11. $2x^2 + 5x + 2 = 0$
12. $10w^2 - 13w - 3 = 0$
13. $-3x^2 + 7x + 6 = 0$
14. $36x = 13 + 36x^2$
15. $4x^2 + 5bx = -b^2$
16. $-32aw - 15a^2 = -7w^2$
17. $x^2 + 3bx - 10b^2 = 0$
18. $b^2x^2 = bx + 30$
19. $a^2y^2 + 3aby + 2b^2 = 0$
20. $27ay - 14y^2 = 10a^2$

2.2 Fórmula General

A continuación mostraremos la deducción de la famosa fórmula general para ecuaciones de segundo grado.
Sea la ecuación general de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ya que $a \neq 0$ la ecuación se divide por a,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

El término independiente se transpone, $\quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

Se completa el trinomio cuadrado, $\quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

Se factoriza el primer miembro y la resta en el segundo $\quad (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

Se realiza el despeje para x $\quad x + \frac{b}{2a}x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces las raíces o soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 2.7. *Determina las soluciones de la ecuación* $x^2 - 3x - 5 = 0$.

Solución. Se identifican los valores de a, b y c de acuerdo con la ecuación dada.

$$a = 1, b = -3, c = -5$$

Se sustituyen en la fórmula general

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Concluimos que las raíces son entonces

$$\frac{3 + \sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{3 - \sqrt{29}}{2}$$

Problemas Propuestos

Emplea la fórmula general y encuentra las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 15 = 8x$
2. $x^2 = x + 6$
3. $x^2 + 2x - 5 = 0$
4. $x^2 - 4x + 5 = 0$
5. $4x^2 = -4x - 17$
6. $x^2 + 6x = -8$
7. $x^2 - 2x - 15 = 0$
8. $36y^2 - 24y = -85$
9. $w^2 - 5w = 0$
10. $\frac{1}{3}z^2 + \frac{5}{6}z = 0$
11. $4x^2 - 20x + 25 = 0$
12. $6x^2 + 13x - 5 = 0$
13. $y^2 - \frac{1}{3}ay = 0$
14. $ax^2 - bx = 0$
15. $x^2 - 25 = 0$
16. $5y^2 - 2y - 3 = 0$
17. $x^2 - 6x + 2 = 0$
18. $x^2 - \frac{1}{4} = 0$
19. $a^2x^2 + b^2 = 0$
20. $a^2w^2 - 16 = 0$

2.3 Propiedades de las Raíces o Soluciones de una ecuación de segundo grado

En la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, la expresión $I = b^2 - 4ac$ es el conocido discriminante, y permite determinar si las raíces son reales o imaginarias.

1. Si $I > 0$, las raíces son reales y diferentes.

2. Si $I = 0$, entonces las raíces son reales e iguales y su valor es: $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Si $I < 0$, entonces las raíces son complejas.

Ejemplo 2.8. *Determina el carácter de las raíces de la ecuación* $20x^2 - x - 1 = 0$.

Solución. Al sustituir los valores de $a = 20$, $b = -1$, $c = -1$ en el discriminante, se obtiene:

$$I = (-1)^2 - 4(20)(-1) = 1 + 80 = 81$$

De acuerdo con el resultado $I > 0$, se deduce que la ecuación tiene 2 soluciones reales y diferentes.

Ejemplo 2.9. *Encuentra el carácter de las raíces de la ecuación* $4y^2 - 8y + 7 = 0$.

Solución. Al sustituir los valores de $a = 4$, $b = -8$, $c = 7$ en el discriminante, se obtiene:

$$I = (-8)^2 - 4(4)(7) = 64 - 112 = -48$$

En este caso $I < 0$, por lo tanto, las raíces son complejas.

Ejercicios Propuestos

Determina el carácter de las raíces de las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$
2. $x^2 + 6x + 16 = 0$
3. $\frac{4}{3}x^2 - 4x + \frac{10}{3} = 0$
4. $36x^2 - 60x + 25 = 0$
5. $4x^2 - 3x = 0$
6. $x^2 + 81 = 0$
7. $x^2 + 4x - 5 = 0$
8. $w^2 - 2w + 5 = 0$
9. $\sqrt{6}y^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})y - 1 = 0$
10. $x^2 + 6x + 9 = 0$
11. $x^2 - 4x + 5 = 0$
12. $\frac{1}{5}x^2 + 2x + 5 = 0$