**ENCUENTRO # 16**
**TEMA**:Fracciones Algebraicas

**CONTENIDOS:**

1. Máximo Común Divisor
2. Mínimo Común Múltiplo
3. Simplificación de Fraciones Algebraicas
4. Suma de Fracciones Algebraicas
5. Resta de Fracciones Algebraicas

## Ejercicio Reto

1. El valor de $\sqrt{25+2020\sqrt{16+2006\sqrt{9+2011\sqrt{4+2019\sqrt{1+(2014)(2016)}}}}}$ es:

   A)2011 B)2012 B)2013 D)2014 E)2015

2. $\dfrac{a^{16}+2a^{11}b^5-a^{10}b^6+a^6b^{10}-2a^5b^{11}-b^{16}}{a^{12}b^7+a^7b^{12}-a^{19}-a^{19}} \div \dfrac{b^8-a^3b^5+a^5b^3-a^8}{a^{13}-a^6b^7+a^7b^6-b^{13}}$ es equivalente a:

   A)$a^2-b^2$ B)$\frac{a^5+ab^4+b^5}{a^3-a^2b+b^3}$ C)$\frac{a^5+b^5}{a^3-b^3}$ D)$\frac{a^8+a^3b^5+b^8}{a^5-a^2b^3+b^5}$ E)$\frac{b^8-a^8}{a^5+b^5}$

# 1. Mínimo Común Múltiplo

El mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas es el término algebraico que se divide por todas y cada una de las expresiones dadas.

### Regla para obtener el mínimo común múltiplo

1. Se obtiene el mcm de los coeficientes.
2. Se toman los factores que no se repiten y, de los que se repiten, el de mayor exponente, y se multiplican por el mínimo común múltiplo de los coeficientes.

**Ejemplo 2.1.** *Determina el mínimo común múltiplo de las expresiones:* $15x^2y^2z$,$24xy^2z$,$36y^4z^2$.

**Solución:** Se encuentra el mcm de 15, 24, 36

| 15 | 24 | 36 | |
|---|---|---|---|
| 15 | 12 | 18 | 2 |
| 15 | 6 | 9 | 2 |
| 15 | 3 | 9 | 2 |
| 5 | 1 | 3 | 3 |
| 5 | 1 | 1 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 5 |

El mcm de los coeficiente 15, 24 y 36 es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

Se toman todos los factores y se escogen los de mayor exponente en el caso de aquellos que sean comunes y, los que no, se escriben igual quedando $x^2y^4z^2$

Finalmente, el mcm es $360x^2y^4z^2$

**Ejemplo 2.2.** *Encuentra el mcm de* $4m^2 + 8m - 12$ , $2m^2 - 6m + 4$ , $6m^2 + 18m - 24$.

**Solución:** Se factorizan los polinomios y se escogen los factores:

$$\begin{aligned} 4m^2 + 8m - 12 &= 4(m^2 + 2m - 3) = 4(m-1)(m+3) \\ 2m^2 - 6m + 4 &= 2(m^2 - 3m + 2) = 2(m-1)(m-2) \\ 6m^2 + 18m - 24 &= 6(m^2 + 3m - 4) = 6(m-1)(m-4) \end{aligned}$$

Se obtiene el mcm de los coeficientes de 4, 2 y 6

| 2 | 4 | 6 | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 |
| 1 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 3 |

El mcm de 4, 2 y 6 es $2^2 \cdot 3 = 12$.

El mcm de los factores es:

$(m+3)(m-2)(m+4)(m-1)$

Por consiguiente, el mcm es:

$12(m+3)(m-1)(m-2)(m+4)$

# Ejercicios Propuestos

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $35x^2y^3z^4; 42x^2y^4z4; 70x^2y^5z^2$
2. $72m^3y^4; 96m^2y^2; 120m^4y^5$
3. $4x^2y; 8x^3y^2; 2x^2yz; 10xy^3z^2$
4. $39a^2bc; 52ab^2c; 78abc^2$
5. $60m^2nx; 75m^4n^{x+2}; 105mn^{x+1}$

6. $22x^a y^b; 33x^{a+2}y^{b+1}; 44x^{a+1}y^{b+2}$
7. $18a^2(x-1)^3; 24a^4(x-1)^2; 30a^5(x-1)^4$
8. $27(a-b)(x+y)^2; 45(a-b)^2(x+y)$
9. $24(2x+1)^2(x-7); 30(x+8)(x-7); 36(2x+1)(x+8)^2$
10. $38(a^3+a^3b); 57a(1+b)^2; 76a^4(1+b)^3$
11. $xy+y; x^2+x$
12. $m^3-1; m^2-1$
13. $m^2+mn; mn+n^2; m^3+m^2n$
14. $x^2-y^2; x2-2xy+y^2$
15. $3x^2-6x; x^3-4x; x^2y-2xy; x^2-x-2$
16. $3a^2-a; 27a^3-1; 9a^2-6a+1$
17. $m^2-2m-8; m^2-m-12; m^3-9m^2+20m$
18. $2a^3-2a^2; 3a^2-3a; 4a^3-4a^2$
19. $12b^2+8b+1; 2b^2-5b-3$
20. $y^3-2y^2-5y+6; 2y^3-5y^2-6y+9; 2y^2-5y-3$
21. $28x; x^2+2x+1; x^2+1; 7x^2+7; 14x+14$
22. $2a; 4b; 6a^2b; 12a^2-24ab+12b^2; 5ab^3-5b^4$
23. $4xy^2; 3x^3-3x^2; a^2+2ab+b^2; ax-a+bx-b$

# 2. Suma y Resta de fracciones algebraicas con denominador común

**Ejemplo 4.1.** *Determina el resultado de:* $\dfrac{2a-a^2b}{a^2b}+\dfrac{3a+4a^2b}{a^2b}$.

**Solución:** Se simplifica cada fracción, si es posible

$$\frac{2a-a^2b}{a^2b}=\frac{(a)(2-ab)}{a^2b}=\frac{2-ab}{ab};\frac{3a+4a^2b}{a^2b}=\frac{(a)(3+4ab)}{a^2b}=\frac{3+4ab}{ab}$$

Se suman las nuevas expresiones resultantes. Como los denominadores son comunes, en la fracción resultante sólo se reducen los numeradores y el denominador permanece igual.

$$\frac{2-ab}{ab}+\frac{3+4ab}{ab}=\frac{2-ab+3+4ab}{ab}=\frac{5+3ab}{ab}$$

**Ejemplo 4.2.** *Encuentra el resultado de* $\dfrac{2m+n}{2m-n}+\dfrac{5m-5n}{2m-n}+\dfrac{n-m}{2m-n}$.

**Solución:** En este caso ningún sumando se puede simplificar, entonces el común denominador es $2m-n$, y sólo se reducen los numeradores.

$$\frac{2m+n}{2m-n}+\frac{5m-5n}{2m-n}+\frac{n-m}{2m-n}=\frac{2m+n+5m-5n+n-m}{2m-n}=\frac{6m-3n}{2m-n}=\frac{(3)(2m-n)}{2m-n}=3$$

# Ejercicios Propuestos

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $\frac{2x^2-7x}{8x^2}+\frac{6x^2+x}{8x^2}$
2. $\frac{1-a^2}{a}-\frac{7-2a^2}{a}$
3. $\frac{7n-1}{10n}-\frac{8n-4}{10n}$
4. $\frac{7m^2-6m}{4mn}+\frac{12m^2-3m}{4mn}$
5. $\frac{35n-7}{5n^2-n}-\frac{15n-3}{5n^2-n}$
6. $\frac{11y^2-14y}{6y^2}-\frac{2y^2+y}{6y^2}$
7. $\frac{12x^2-x+5}{22x}+\frac{6+x-x^2}{22x}$
8. $\frac{13x-y}{3x-2y}+\frac{5x-3y}{3x-2y}-\frac{3x+6y}{3x-2y}$
9. $\frac{6a+5b}{8a-2b}-\frac{a+6b}{8a-2b}+\frac{3a-b}{8a-2b}$

# 3. Suma y Resta de fracciones algebraicas con distinto denominador

**Ejemplo 5.1.** *Efectúa la siguiente operación:* $\dfrac{3x}{2y^2}+\dfrac{5y}{4x^2}$.

**Solución:** Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores y se realizan las operaciones correspondientes

$$\frac{3x}{2y^2}+\frac{5y}{4x^2}=\frac{(3x)(2x^2)+(5y)(y^2)}{4x^2y^2}=\frac{6x^3+5y^3}{4x^2y^2}$$

**Ejemplo 5.2.** *Realiza la siguiente operación y simplificar al máximo* $\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}$.

**Solución:** Se obtiene el común denominador de los denominadores $x+h$ y $x$, posteriormente se procede a realizar la diferencia de fracciones

$$\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{(x)(x+h)} = \frac{x-x-h}{(x)(x+h)} = \frac{-h}{(x)(x+h)}$$

**Ejemplo 5.3.** *Efectúa* $\dfrac{3x}{x^2-6x+9} + \dfrac{4}{x-3}$.

**Solución:** Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores y se efectúan las operaciones:

$$\frac{3x}{x^2-6x+9} + \frac{4}{x-3} = \frac{(3x)(1)+(4)(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{3x+4x-12}{(x-3)^3} = \frac{7x-12}{(x-3)^3}$$

**Ejemplo 5.4.** *Realiza la siguiente operación* $\dfrac{1}{(x+h)^2-1} - \dfrac{1}{x^2-1}$.

**Solución:** Se determina el común denominador, éste se divide por cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por su numerador, los productos se reducen al máximo

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+h)^2-1} - \frac{1}{x^2-1} &= \frac{1}{x^2+2hx+h^2-1} - \frac{1}{x^2-1} &&= \frac{(1)(x^2-1)-(1)(x^2+2hx+h^2-1)}{(x^2+2hx+h^2-1)(x^2-1)} \\ &= \frac{(x^2-1-x^2-2hx-h^2+1)}{(x^2+2hx+h^2-1)(x^2-1)} &&= \frac{-2xh-h^2}{(x^2+2hx+h^2-1)(x^2-1)}\end{aligned}$$

**Ejemplo 5.5.** *Simplifica la siguiente operación:* $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} + (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

**Solución:** A los enteros se les coloca la unidad como denominador:

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} + (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{1}$$

Luego, el común denominador es $(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$, por tanto

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} + (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{1} = \frac{(x^2)(1)+[(x^2+1)^{\frac{1}{2}}][(x^2+1)^{\frac{1}{2}}]}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

se aplica la propiedad $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ y se simplifica al máximo el numerador, entonces:

$$\frac{x^2+[(x^2+1)^{\frac{1}{2}}][(x^2+1)^{\frac{1}{2}}]}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2+(x^2+1)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

**Ejemplo 5.6.** *Simplifica la siguiente operación:* $\dfrac{x^3}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}-(x^3-1)^{\frac{1}{3}}$.

**Solución:** El común denominador de esta diferencia de fracciones es $(x^3-1)^{\frac{2}{3}}$, entonces:

$$\frac{x^3}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}-(x^3-1)^{\frac{1}{3}}=\frac{x^3-(x^3-1)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^3-(x^3-1)}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^3-x^3+1}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}$$

Por tanto, la simplificación es:

$$\frac{x^3}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}-(x^3-1)^{\frac{1}{3}}=\frac{x^3-(x^3-1)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}$$

**Ejemplo 5.7.** *Efectúa y simplifica la siguiente expresión:* $\dfrac{(x)(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x)(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$.

**Solución:** El común denominador es el producto de los denominadores:

$$(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

Se realiza la operación:

$$\begin{aligned}\frac{(x)(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x)(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{(x)(x^2+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}-(x)(x^2-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(x)(x^2+1)-(x)(x^2-1)}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{x^3+x-x^3+x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

En el denominador los factores están elevados al mismo exponente, se pueden multiplicar las bases, las cuales dan como resultado una diferencia de cuadrados, por tanto:

$$\frac{(x)(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x)(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

**Ejemplo 5.8.** *Simplifica la siguiente operación:* $\dfrac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{2(x+1)^{\frac{1}{3}}}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}$.

**Solución:** Se obtiene el común denominador y se procede a realizar la diferencia:

$$\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}-\frac{2(x+1)^{\frac{1}{3}}}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}-2(x+1)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{(x-2)-2(x+1)}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{x-2-2x-2}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}$$

Por último se simplifica el numerador, entonces:

$$\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}-\frac{2(x+1)^{\frac{1}{3}}}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{-x-4}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=-\frac{x+4}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}$$

**Ejemplo 5.9.** *Realiza y simplifica la operación:*

$$\frac{a+b}{a^2-ab-20b^2}-\frac{a+4b}{a^2-4ab-5b^2}+\frac{a+5b}{a^2+5ab+4b^2}$$

**Solución:** Se factorizan los denominadores:

$$\begin{aligned} a^2-ab-20b^2 &= (a-5b)(a+4b)\\ a^2-4ab-5b^2 &= (a-5b)(a+b)\\ a^2+5ab+4b^2 &= (a+4b)(a+b) \end{aligned}$$

La expresión con los denominadores factorizados es:

$$\frac{a+b}{(a-5b)(a+4b)}-\frac{a+4b}{(a-5b)(a+b)}+\frac{a+5b}{(a+4b)(a+b)}$$

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores: $(a-5b)(a+4b)(a+b)$. Se resuelve la fracción:

$$\begin{aligned} &= \frac{(a+b)(a+b)-(a+4b)(a+4b)+(a-5b)(a+5b)}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}\\ &= \frac{a^2+2ab+b^2-a^2-8ab-16b^2+a^2-25b^2}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}\\ &= \frac{a^2-6ab-40b^2}{(a-5b)(a+4b)(a+b)} \end{aligned}$$

El numerador se factoriza, si es posible, para simplificar al máximo, entonces

$$=\frac{(a-10b)(a+4b)}{(a-5b)(a+4b)(a+b)}=\frac{a-10b}{(a-5b)(a+b)}$$

# Ejercicios Propuestos

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{x-2}{4x}+\dfrac{x+5}{10x}$
2. $\dfrac{x+1}{2x}+\dfrac{2x+3}{3x}$
3. $\dfrac{x-4}{9x^2}+\dfrac{x-3}{6x}$
4. $\dfrac{1}{x+h+2}-\dfrac{1}{x+2}$

5. $\dfrac{x+h+1}{x+h-1} - \dfrac{x+1}{x-1}$

6. $\dfrac{2}{(x+h)^2-3} - \dfrac{2}{x^2-3}$

7. $\dfrac{(x+h)^2}{(x+h)^2+1} - \dfrac{x^2}{x^2+1}$

8. $\dfrac{6x}{x^2-9} + \dfrac{x}{x+3}$

9. $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{x+2}{x^2-1}$

10. $\dfrac{7x}{x^2+6x+9} + \dfrac{1}{x^2-9}$

11. $\dfrac{x+1}{x^2+x-12} - \dfrac{12}{x^2+5x-24}$

12. $\dfrac{4x}{x^2-4} + \dfrac{x}{x+2}$

13. $\dfrac{2x^2+8}{2x^2+2x-12} - \dfrac{5x-6-x^2}{x^2+2x-8}$

14. $\dfrac{3}{x^2-2x+1} + \dfrac{2}{x^2-1}$

15. $\dfrac{4x}{x^2-4} + \dfrac{x}{x+2}$

16. $\dfrac{4x-5}{x^2+x-12} + \dfrac{9}{18-3x-x^2} + \dfrac{2}{x^2+10x+24}$

17. $\dfrac{1}{2x^2+11x+15} + \dfrac{6x+7}{3x^2+7x-6} - \dfrac{19}{6x^2+11x-10}$

18. $\dfrac{3x+2y}{x^2+3xy-10y^2} - \dfrac{5x+y}{x^2+4xy-5y^2} + \dfrac{4x-y}{x^2-3xy+2y^2}$

19. $\dfrac{3}{x^2-2x+1} + \dfrac{2}{x^2-1}$

20. $(2x)(x-2)^{\frac{1}{3}} - \dfrac{x^2}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}$