ENCUENTRO # 14
TEMA: Factorizaciones

CONTENIDOS:

1. División sintética

2. Combinaciones de casos

Ejercicio Reto

1. Si se tiene $x^2yz^3 = 7^3$ y $xy^2 = 7^9$ entonces xyz
   A)7 B)7^2 B)7^4 D)7^6 E)7^8

2. En la sustracción, las letras representan dígitos diferentes: $(8542) - (2BAC) = (D645)$. Determina el valor de $A + B + C + D$
   A)29 B)27 B)30 D)28 E)31

Definición:
La división sintética se puede utilizar para dividir una función polinómica por un binomio de la forma $x - c$. Esto nos permite, por ejemplo hallar el cociente y el resto que se obtiene al dividir el polinomio por $x - c$. Además, por el *teorema del resto* al aplicar la división sintética se obtiene el valor funcional del polinomio. También permite encontrar los factores y ceros de un polinomio. Al encontrar los ceros de un polinomio, éste se puede factorizar completamente y expresar como el producto de sus factores lineales. En resumen, la división sintética juega un papel preponderante en la división de un polinomio por un factor lineal de la forma $x - c$.

1. División sintética

La regla de Ruffini (división sintética), establece un método para la división del polinomio:
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$
entre el binomio:
$Q(x) = x - r$
para obtener el cociente:
$R(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$
y el resto: s

Pasos para aplicar división sintética

Paso 1.1. *Se trazan dos líneas a manera de ejes y se escriben los coeficientes de $P(x)$, ordenados y sin omitir términos nulos. Se escribe la* raíz r *del lado izquierdo y el primer coeficiente en el renglón inferior* (a_n)*:*

$$
\begin{array}{c|lccc}
 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \quad a_0 \\
r & & & & \\
\hline
 & a_n & & & \\
 & = b_{n-1} & & &
\end{array}
$$

Paso 1.2. *Se multiplica* (a_n) *por* r *y se escribe debajo de* $a_n - 1$*:*

$$
\begin{array}{c|lccc}
 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \quad a_0 \\
r & & b_{n-1}\, r & & \\
\hline
 & a_n & & & \\
 & = b_{n-1} & & &
\end{array}
$$

Paso 1.3. *Se suman los dos valores obtenidos en la misma columna:*

$$
\begin{array}{c|lccc}
 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \quad a_0 \\
r & & b_{n-1}\, r & & \\
\hline
 & a_n & a_{n-1} + b_{n-1}\, r & & \\
 & = b_{n-1} & = b_{n-2} & &
\end{array}
$$

Paso 1.4. *El proceso se repite:*

$$
\begin{array}{c|lcccc}
 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\
r & & b_{n-1}\, r & \dots & b_1\, r & b_0\, r \\
\hline
 & a_n & a_{n-1} + b_{n-1}\, r & \dots & a_1 + b_1\, r & a_0 + b_0\, r \\
 & = b_{n-1} & = b_{n-2} & \dots & = b_0 & = s
\end{array}
$$

Los valores b *son los coeficientes del polinomio resultante* $R(x)$ *de grado uno menos que el grado de* $P(x)$*. El residuo es* s*.*

Ejemplo 1.1. *División de* $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$ *entre* $Q(x) = x + 1$ *utilizando la regla de Ruffini.*

1. *Se escribe* $Q(x) = x + 1 = x - (-1)$ *y el primer coeficiente (2) en el primer renglón:*

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 3 & 0 & -4 \\
-1 & & & & \\
\hline
 & 2 & & &
\end{array}
$$

2. *Multiplicando por la raíz* $r = (-1)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & 0 & -4 \\ -1 & & -2 & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

3. *Sumando la columna:*

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & 0 & -4 \\ -1 & & -2 & & \\ \hline & 2 & 1 & & \end{array}$$

4. *El procedimiento se repite hasta obtener el residuo:*

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & 0 & -4 \\ -1 & & -2 & -1 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & -3 \\ & \text{Coef.} & & & \text{Resto} \end{array}$$

Si $elpolinomiooriginal = divisor \times cociente + resto,\ entonces$
$P(x) = Q(x)R(x) + s,\ donde$
$R(x) = 2x^2 + x - 1\ y\ s = -3$

Ejemplo 1.2. *Cuando el resto es igual a 0; permite factorizar, como en el siguiente ejemplo:*
$F(x) = x^3 + x^2 - x - 1$
Tomamos
$G(x) = x + 1$
Usamos el método, y nos queda así:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & & -1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & \text{Coef.} & & & \text{Resto} \end{array}$$

Entonces $F(x)$ *se factoriza* $(x^2 - 1)(x + 1)$

Ejercicios Propuestos

Divide las siguientes expresiones utilizando división sintética:

1. $3x^3 + 7x^2 - 4x + 3$ entre $x + 3$
2. $3x^4 - 21x^3 + 31x^2 - 25$ entre $x - 5$
3. $3x^4 - 4x^3 + 8x^2 \breve{}\, 5x - 5$ entre $x - 2$
4. $2x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 13x - 3$ entre $x - 3$
5. $6x^4 + 13x^3 + 35x - 24$ entre $x + 3$
6. $3x^3 + 7x^2 - 4x + 3$ entre $x + 3$
7. $x^5 - 208x^2 + 2076$ entre $x - 5$
8. $2x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ entre $2x - 1$

2. Divisibilidad de $a^n \pm b^n$ por $a \pm b$

1. $a^n - b^n$ por $a - b$ siempre es divisible
2. $a^n - b^n$ por $a + b$ es divisible si n es par
3. $a^n + b^n$ por $a + b$ es divisible si n es impar
4. $a^n + b^n$ por $a - b$ nunca es divisible

Ejercicios Propuestos

1. Factoriza los siguientes polinomios.

1. $b^3 - b^2 - b - 1$
2. $w^3 + 2w^2 - w - 2$
3. $x^3 - 4x^2 + x + 6$
4. $x^3 + x^2 - 14x - 24$
5. $4x^3 - 7x + 3$
6. $m^3 + 2m^2 + m + 2$
7. $6y^3 + y^2 - 11y - 6$
8. $a^4 - 10a^2 + 9$
9. $3x^3 + 4x^2 - 59x - 20$
10. $m^4 + 6m^3 + 3m + 140$
11. $n^4 - 2n^3 - 3n^2 + 4n + 4$
12. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$
13. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$
14. $x^5 - 4x^4 + 10x^2 - x - 6$
15. $a^5 - 30a^3 - 25a^2 - 36a - 180$
16. $2x^5 - 5x^4 - 12x^3 + 23x^2 + 16x - 12$
17. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 32x - 24$
18. $6x^5 + 7x^4 - 47x^3 - 13x^2 + 77x - 30$
19. $n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36$
20. $2x^6 - 3x^5 - 35x^4 - 2x^2 + 3x + 35$