ENCUENTRO # 13
TEMA: Casos de Factorización

EJERCICIOS RETO:

1. Una prueba tiene 25 preguntas, y por cada respuesta correcta se dan 4 puntos y se les resta un punto por cada respuesta incorrecta. Si se omite la respuesta se le da cero puntos. Ana logró 77 puntos en dicha prueba. ¿Cuántas respuestas omitió Ana?

2. Un establecimiento de venta de zapatos vende todos sus pares de zapatos al mismo precio, y dicho precio es un número entero. María y Lucía van a al establecimiento a comprar zapatos. María tiene \$200 y al comprar la mayor cantidad de zapatos con el capital que tiene, le sobran \$32. Lucía tiene \$150 y ella compra la mayor cantidad de zapatos que le es posible y al final le restan \$24. ¿Cuál es el precio de un par de zapatos?

CONTENIDOS:

1. Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP).

2. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

3. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

4. Casos especiales.

DESARROLLO

Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP): Un TCP es toda expresión de la forma

$$a^2 \pm 2ab + b^2.$$

La cual para factorizarla, se seben seguir los siguientes pasos

1. Lo primero que se debe hacer es ordenar los elementos de menor a mayor exponente o viceversa.

2. Se extraen las raíces cuadradas del primer y tercer término.

$$\sqrt{a^2} = a \qquad\qquad \sqrt{b^2} = b$$

3. Se comprueba que la expresión es un TCP al al realizar el doble producto de las raíces

$$2 \cdot a \cdot b$$

este debe ser igual en al segundo término (ya ordenado) del trinomio dado para que sea un TCP

2. *Factoriza* $4x^2 + 9y^2 - 12xy$.

Solución: Primero se ordenan los términos

$$4x^2 + 9y^2 - 12xy = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

ahora se verifica que es un trinomio cuadrado perfecto extrayendo las raíces cuadradas de los términos extremos

$$\sqrt{4x^2} = 2x \qquad \sqrt{9y^2} = 3y \qquad \text{Comprobación} = 2(2x)(3y) = 12xy$$

Finalmente el resultado de la factorización es

$$4x^2 + 9y^2 - 12xy = 4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2.$$

3. *Factoriza la siguiente expresión* $(m+n)^2 + (m+n) + \frac{1}{4}$

Solución: Se obtienen las raíces de los extremos y se comprueba el doble producto

$$\sqrt{(m+n)^2} = m + n \qquad \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \qquad \text{Comprobación} = 2(m+n)\left(\frac{1}{2}\right) = m + n$$

Por tanto, la factorización de la expresión es:

$$(m+n)^2 + (m+n) + \frac{1}{4} = \left((m+n) + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(m + n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

4. *Factoriza la siguiente expresión* $3a - 2\sqrt{15ab} + 5b$.

Solución: Las raíces de los extremos y la comprobación de que la expresión es un trinomio cuadrado prefecto es:

$$\sqrt{3a} \text{ y } \sqrt{5b} \qquad \text{Comprobación} = 2\left(\sqrt{3a}\right)\left(\sqrt{5b}\right) = 2\sqrt{(3a)(5b)} = 2\sqrt{15ab}$$

por tanto,

$$3a - 2\sqrt{15ab} + 5b = \left(\sqrt{3a} - \sqrt{5b}\right)^2.$$

5. *Factoriza la siguiente expresión* $x^{\frac{1}{4}} + 4x^{\frac{1}{8}} + 4$.

Solución: Se obtienen las raíces de los extremos y se comprueba

$$\sqrt{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{(4)(2)}} = x^{\frac{1}{8}} \qquad \sqrt{4} = 2 \qquad \text{Comprobación} = 2\left(x^{\frac{1}{8}}\right)(2) = 4x^{\frac{1}{8}}$$

por consiguiente, el trinomio es cuadrado perfecto y su factorización es:

$$x^{\frac{1}{4}} + 4x^{\frac{1}{8}} + 4 = \left(x^{\frac{1}{8}} + 2\right)^2.$$

Ejercicios

1. $a^2+8a+16$
2. $n^2-8n+16$
3. $\frac{y^2}{4}-yz+z^2$
4. $x^4-x^2y^2+\frac{y^4}{4}$
5. $x^2+12x+36$
6. $49x^6-70ax^3y^2+25a^2y^4$
7. $16m^6-2m^3n^2+\frac{n^4}{16}$
8. $16x^{\frac{1}{2}}-8x^{\frac{1}{4}}+1$
9. x^8+18x^4+81
10. $36+121c^2-132c$
11. $4a^2-20ab+25b^2$
12. $\sqrt[3]{m^2}-6\sqrt[3]{m}+9$
13. $4(1+m)^2-4(1+m)(n-1)+(n-1)^2$
14. $(m+n)^2-2(m+n)(m-n)+(m-n)^2$
15. $4a^2-12ab+9b^2$
16. $100a^4-60a^2b+9b^2$
17. $(m+a)^2-2(m+a)(a+b)+(a+b)^2$
18. $ax+4\sqrt{ax}+4$

Trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2+bx+c}$: Esta expresión resulta del producto de binomios con término común. Para factorizarla se realizan los pasos aplicados en los siguientes ejemplos:

6. *Factoriza la expresión* $x^2+11x+24$

Solución: Se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático y se coloca el resultado en ambos factores:

$$x^2 + 11x + 24 = (x \quad)(x \quad)$$

Se coloca el signo del segundo término ($+11x$) en el primer factor y se multiplica el signo del segundo término por el del tercer término $(+)(+) = +$ para obtener el signo del segundo factor:

$$x^2 + 11x + 24 = (x+ \quad)(x+ \quad)$$

Al ser los signos de los factores iguales, se buscan dos cantidades cuyo producto sea igual al tercer término (24) y cuya suma sea igual a 11; estos números son 8 y 3, que se colocan en el primer factor, el mayor, y en el segundo factor, el menor:

$$x^2 + 11x + 24 = (x + 8)(x + 3)$$

Finalmente, la factorización es: $(x + 8)(x + 3)$.

7. *Factoriza la expresión* $m^2 - 13m + 30$.

Solución: La raíz cuadrada del término cuadrático es ”m”; el primer factor va acompañado del signo del segundo término ($-13m$) y el segundo factor va con el signo que resulta del producto de los signos del segundo y tercer término $(-)(+) = -$

$$m^2 - 13m + 30 = (m- \quad)(m- \quad)$$

Se buscan dos cantidades que multiplicadas den 30 y sumadas 13, estas cantidades son 10 y 3, se acomodan de la siguiente forma y el resultado de la factorización es:

$$m^2 - 13m + 30 = (m - 10)(m - 3)$$

Cuando los signos de los factores son iguales (positivos o negativos), los números buscados se suman (ejemplos 6 y 7), pero si los signos de los factores son diferentes, entonces los números buscados se restan (ejemplos a continuación).

8. *Factoriza* $x^2 - 18 - 7x$.

Solución: Se ordenan los términos en forma descendente con respecto a los exponentes y se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático:

$$x^2 - 18 - 7x = (x \quad)(x \quad)$$

en el primer factor se coloca el signo del término lineal ($-7x$) y en el segundo se coloca el signo que resulta de multiplicar los signos del término lineal ($-7x$) y el independiente (-18)

$$x^2 - 18 - 7x = (x- \quad)(x+ \quad)$$

se buscan dos números cuyo producto sea igual a 18 y cuya resta sea 7. En este caso los números que cumplen esta condición son 9 y 2. Es importante señalar que el número mayor va en el primer factor y el menor en el segundo.

$$x^2 - 18 - 7x = (x - 9)(x + 2)$$

9. *Factoriza la expresión* $x^4 - x^2 - 6$*.*

Solución: Se extrae la raíz cuadrada del primer término, se escriben los signos y se buscan dos números que al multiplicarse den 6 y al restarse 1 para que la expresión factorizada sea

$$x^4 - x^2 - 6 = (x^2 - 3)(x^2 + 2)$$

10. *Factoriza la expresión* $x^2 + xy - 20y^2$*.*

Solución: Después de extraer la raíz cuadrada, acomodar los signos y buscar los números, la factorización es

$$x^2 + xy - 20y^2 = (x + 5y)(x - 4y)$$

11. *Factoriza la expresión* $21 - 4x - x^2$*.*

Solución: Se ordena el trinomio y se factoriza el signo del término cuadrático

$$21 - 4x - x^2 = -x^2 - 4x + 21 = -(x^2 + 4x - 21)$$

al factorizar la última expresión

$$-(x^2 + 4x - 21) = -(x + 7)(x - 3)$$

Se multiplica el segundo factor por el signo negativo y se ordena para que el resultado sea

$$-(x + 7)(x - 3) = (x + 7)(-x + 3) = (x + 7)(3 - x)$$

12. *Factoriza la expresión* $5 + 4a^{3n} - a^{6n}$*.*

Solución: Se ordenan los términos y se factoriza el signo negativo

$$5 + 4a^{3n} - a^{6n} = -a^{6n} + 4a^{3n} + 5 = -\left(a^{6n} - 4a^{3n} - 5\right)$$

La expresión encerrada en el paréntesis se factoriza al igual que las anteriores

$$-\left(a^{6n} - 4a^{3n} - 5\right) = -\left(a^{3n} - 5\right)\left(a^{3n} + 1\right)$$

se multiplica el signo por los términos del primer factor y el resultado de la factorización es:

$$-\left(a^{3n} - 5\right)\left(a^{3n} + 1\right) = \left(-a^{3n} + 5\right)\left(a^{3n} + 1\right) = \left(5 - a^{3n}\right)\left(a^{3n} + 1\right).$$

13. *Factoriza la expresión* $(2x+3)^2 - 3(2x+3) - 28$.

Solución: Se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático y se realizan los procedimientos descritos en los ejemplos anteriores para obtener como resultado

$$\begin{aligned}(2x+3)^2 - 3(2x+3) - 28 &= ((2x+3)-7)\,((2x+3)+4)\\ &= (2x+3-7)(2x+3+7)\\ &= (2x-4)(2x+7) = 2(x-2)(2x+7)\end{aligned}$$

Ejercicios

1. $n^2 - 7n + 12$
2. $x^2 + 7x + 12$
3. $m^2 - 9m + 20$
4. $n^2 + 6n + 8$
5. $x^2 - 18x - 7x$
6. $m^2 - 7mn - 30$
7. $y^4 - 6y^2 + 8$
8. $x^4 - x^2 - 90$
9. $y^6 - 5y^3 - 14$
10. $z^{10} + z^5 - 20$
11. $x^4y^4 - 2x^2y^2 - 99$
12. $y^2 + 3y - 550$
13. $a^2 + 33a + 252$
14. $12 + x - x^2$
15. $16 + 6(3x) - (3x)^2$
16. $143 + 2(5x) - (5x)^2$
17. $y^{6a} + 65y3a + 64$
18. $(x+1)^2 - 12(x+1) + 32$

19. $(6a+5)^2 - 15(6a+5) + 50$

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$. En este trinomio el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno.

14. *Factoriza la expresión* $6x^2 - 7x - 3$.

Solución: Se ordenan los términos según la forma ax^2+bx+c, se multiplica y se divide por el coeficiente del término cuadrático, en el caso del segundo término sólo se deja indicada la multiplicación.

$$\frac{6(6x^2 - 7x - 3)}{6} = \frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6}$$

la expresión del numerador se factoriza como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

$$\frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x-9)(6x+2)}{2}$$

se obtiene el factor común de cada binomio y se simplifica la fracción

$$\frac{3(2x-3)2(3x+1)}{2} = (2x-3)(3x+1)$$

finalmente, la factorización de $6x^2 - 7x - 3$ es $(2x-3)(3x+1)$.

15. *Factoriza la expresión* $3x^2 - 5x - 2$.

Solución: Se multiplica y se divide la expresión por 3, para que se transforme en una expresión de la forma $x^2 + bx + c$.

$$3x^2 - 5x - 2 = \frac{3(3x^2 - 5x - 2)}{3} = \frac{9x^2 - 5(3x) - 6}{3}$$

Se factoriza la expresión y se simplifica para obtener como resultado de la factorización

$$= \frac{(3x-6)(3x+1)}{3} = \frac{3(x-2)(3x+1)}{3} = (x-2)(3x+1)$$

por consiguiente $3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x+1)$

16. *Factoriza la expresión* $6a^2x^2 + 5ax - 21$.

Solución: Se aplican los pasos descritos en los ejemplos anteriores y se obtiene

$$6a^2x^2+5ax-21 = \frac{6(6a^2x^2 + 5ax - 21)}{6} = \frac{36a^2x^2 + 5(6ax) - 126}{6} = \frac{(6ax)^2 + 5(6ax) - 126}{6}$$
$$= \frac{(6ax+14)(6ax-9)}{6} = \frac{2(3ax+7)3(2ax-3)}{6} = (3ax+7)(2ax-3)$$

finalmente, el resultado de la factorización es $6a^2x^2 + 5ax - 21 = (3ax+7)(2ax-3)$.

17. *Factoriza la expresión* $5 + 11x - 12x^2$.

Solución: Se ordenan los términos y se factoriza el signo negativo

$$5 + 11x - 12x^2 = -(12x^2 - 11x - 5)$$

se realiza la factorización y se obtiene

$$\begin{aligned}-(12x^2-11x-5) &= -\frac{12(12x^2 - 11x - 5)}{12} = -\frac{144x^2 - 11(12x) - 60}{12} = -\frac{(12x)^2 - 11(12x) - 60}{12}\\ &= -\frac{(12x - 15)(12x + 4)}{12} = \frac{3(4x - 5)4(3x + 1)}{12} = -(4x - 5)(3x + 1)\end{aligned}$$

se multiplica el signo por el primer factor y se ordenan los términos

$$-(4x - 5)(3x + 1) = (-4x + 5)(3x + 1) = (5 - 4x)(3x + 1)$$

finalmente, el resultado de la factorización es $(5 - 4x)(3x + 1)$.

Otro método que es usado para factorizar este tipo de trinomios es *agrupación de términos.*

18. *Factoriza la expresión* $6x^2 + 13x + 5$.

Solución: Se multiplica el coeficiente del primer término por el término independiente $(6)(5) = 30$, luego se buscan dos números que multiplicados den 30 y sumados 13, en este caso los números son 10 y 3, por tanto, el segundo término se expresa como $13x = 10x + 3x$ y se procede a factorizar agrupando términos:

$$6x^2 + 13x + 5 = 6x^2 + 10x + 3x + 5 = 2x(3x + 5) + 1(3x + 5) = (3x + 5)(2x + 1).$$

Finalmente, la factorización es $6x^2 + 13x + 5 = (3x + 5)(2x + 1)$.

19. *Factoriza la expresión* $8x^4 - 19x^2 + 6$.

Solución: Se multiplican los coeficientes de los extremos de la expresión $(8)(6) = 48$, luego se buscan dos números que multiplicados den 48 y sumados -19, por consiguiente, el segundo término se expresa como $-19x^2 = -16x^2 - 3x^2$ y se procede a factorizar

$$8x^4 - 19x^2 + 6 = 8x^4 - 16x^2 - 3x^2 + 6 = 8x^2(x^2 - 2) - 3(x^2 - 2) = (x^2 - 2)(8x^2 - 3).$$

Finalmente $8x^4 - 19x^2 + 6 = (x^2 - 2)(8x^2 - 3)$.

20. *Factoriza la expresión* $15x^2 - 2xy - 8y^2$.

Solución: Se multiplican los coeficientes de los extremos del trinomio $(15)(-8) = -120$, luego se descompone -120 en dos factores, de tal manera que restados den como resultado el coeficiente del término central -2, estos números son -12 y 10, luego la expresión se descompone de la siguiente manera:

$$15x^2-2xy-8y^2 = 15x^2-12xy+10xy-8y^2 = 3x(5x-4y)+2y(5x-4y) = (5x-4y)(3x+2y).$$

Finalmente, la factorización es $15x^2 - 2xy - 8y^2 = (5x - 4y)(3x + 2y)$.

Ejercicios

1. $5m^2 + 13m - 6$
2. $2x^2 + 3x - 2$
3. $7a^2 - 44a - 35$
4. $15m^2 - 8m - 12$
5. $6y^4 + 5y^2 - 6$
6. $15y^2 - by - 2b^2$
7. $15 + 2b^2 - 8b^4$
8. $6a^2 - 43ab - 15b^2$
9. $6m^2 - 11mn + 4n^2$
10. $4x^2y^2 + 3xy - 10$

Casos especiales A continuación se verán casos especiales de factoriación de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ y combinación de trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrado.

Casos especiales de trinomios de la forman $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$. Estos ocurren cuando algunos de sus coeficientes son fracciones o tienen raíz cuadrada.

21. *Factoriza la expresión* $2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12}$.

Solución: En este caso se incluyen fracciones, entonces los extremos deben expresarse como una fracción que contenga el mismo denominador, por tanto:

$$2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \frac{2(12)}{12}p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \frac{24}{12}p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12}$$

se multiplican los coeficientes numeradores de los extremos del trinomio $(24)(1) = 24$, se buscan dos números que multiplicados den 24 y sumados 11, en este caso los números son 3 y 8, por tanto el trinomio se expresa como

$$2p^2 + \frac{11}{12}p + \frac{1}{12} = \frac{24}{12}p^2 + \frac{3}{12}p + \frac{8}{12}p + \frac{1}{12} = 2p^2 + \frac{1}{4}p + \frac{2}{3}p + \frac{1}{12}$$

Se procede a realizar la factorización del polinomio resultante:

$$2p^2 + \frac{1}{4}p + \frac{2}{3}p + \frac{1}{12} = p\left(2p + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(2p + \frac{1}{4}\right) = \left(2p + \frac{1}{4}\right)\left(p + \frac{1}{3}\right)$$

Entonces, se concluye que: $2p^2 + \dfrac{11}{12}p + \dfrac{1}{12} = \left(2p + \dfrac{1}{4}\right)\left(p + \dfrac{1}{3}\right)$

22. *Factoriza la expresión* $6x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3}{10}$.

Solución: Se convierten los coeficientes del trinomio en una fracción con denominador común:

$$6x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3}{10} = \frac{6(20)}{20}x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{3(2)}{10(2)} = \frac{120}{20}x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{6}{20}$$

se multiplican los numeradores de los extremos $(120)(6) = 720$, entonces se buscan dos números que multiplicados den 720 y restados 29, los cuales son 45 y 16, por tanto, la expresión se representa como:

$$\frac{120}{20}x^2 - \frac{29}{20}x - \frac{6}{20} = \frac{120}{20}x^2 - \frac{45}{20}x + \frac{16}{20} - \frac{6}{20} = 6x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{4}{5}x - \frac{6}{20}$$

al factorizar se obtiene como resultado

$$6x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{4}{5}x - \frac{6}{20} = 3x\left(2x - \frac{3}{4}\right) + \frac{2}{5}\left(2x - \frac{3}{4}\right) = \left(2x - \frac{3}{4}\right)\left(3x + \frac{2}{5}\right).$$

23. *Factoriza la expresión* $3x + 2\sqrt{x} - 8$.

Solución: Se multiplican los coeficientes de los extremos $(3)(8) = 24$. Se buscan dos números que al multiplicarse den 24 y restados 2, en este caso los números son 6 y 4, entonces

$$3x + 2\sqrt{x} - 8 = 3x + 6\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 8$$

se expresa $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$ y se realiza la factorización

$$3x+6\sqrt{x}-4\sqrt{x}-8 = 3\left(\sqrt{x}\right)^2+6\sqrt{x}-4\sqrt{x}-8 = 3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)-4\left(\sqrt{x}+2\right) = \left(\sqrt{x}+2\right)\left(3\sqrt{x}-4\right)$$

por consiguiente, el resultado de la factorización es $(\sqrt{x}+2)(3\sqrt{x}-4)$.

Factorización que combina un TCP y una diferencia de cuadrados

24. *Factoriza* $x^2 - 2xy + y^2 - a^2$.

Solución: La expresión $x^2-2xy+y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y su factorización es:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

por tanto

$$x^2 - 2xy + y^2 - a^2 = (x^2 - 2xy + y^2) - a^2 = (x-y)^2 - a^2$$

al factorizar la diferencia de cuadrados se obtiene finalmente

$$(x-y)^2 - a^2 = (x-y+a)(x-y-a).$$

25. *Factoriza la siguiente expresión* $16a^2 - m^2 - 8mn - 16n^2$.

Solución: Se agrupan los términos de la siguiente manera y se factoriza el signo negativo

$$16a^2 - m^2 - 8mn - 16n^2 = 16a^2 + (-m^2 - 8mn - 16n^2) = 16a^2 - (m^2 + 8mn + 16n^2)$$

se factoriza el trinomio cuadrado perfecto y luego la diferencia de cuadrados

$$16a^2 - (m+4n)^2 = [4a + (m+4n)][4a - (m+4n)] = (4a+m+4n)(4a-m-4n)$$

26. *Factoriza la siguiente expresión* $a^2 - 2ab + b^2 - 25m^{10} + 40m^5n^3 - 16n^6$.

Solución: Se agrupan los términos que forman trinomios cuadrados perfectos y posteriormente se factoriza la diferencia de cuadrados para que finalmente el resultado sea

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 - 25m^{10} + 40m^5n^3 - 16n^6 &= (a^2 - 2ab + b^2) - (25m^{10} - 40m^5n^3 + 16n^6) \\ &= (a-b)^2 - (5m^5 - 4n^3)^2 \\ &= [(a-b) + (5m^5 - 4n^3)][(a-b) - (5m^5 - 4n^3)] \\ &= (a - b + 5m^5 - 4n^3)(a - b - 5m^5 + 4n^3). \end{aligned}$$

Ejercicios

1. $6x^2 + \frac{15}{4} + \frac{3}{8}$
2. $\frac{1}{6}a^2 + 17/72a + \frac{1}{12}$
3. $\frac{1}{24}x^2 - \frac{13}{72}xy + \frac{1}{6}y^2$
4. $15x - 23\sqrt{x} - 28$
5. $3x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 2$
6. $8x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 15y^{\frac{4}{3}}$
7. $x^2 - y^2 + 10y - 25$
8. $m^2 - 6x - 9 - x^2 + 2am + a^2$
9. $2by - y^2 + 1 - b^2$
10. $x^2 + 2xy + y^2 - 16a^2 - 24ab^5 - 9b^10$
11. $4m^2 - 9a^2 + 49n^2 - 30ab - 25b^2 - 28mn$