ENCUENTRO # 12
TEMA:Factorizaciones

CONTENIDOS:

1. Factor común
2. Factor común por Agrupamiento
3. Diferencia de cuadrados
4. Suma o Diferencia de Cubos

Ejercicio Reto

1. Si $a^a = 2$, el valor de $a^{a^{a^{a+1}}+1}$ es:
   A)2 B)4 B)8 D)16 E)64
2. Si $A \times B = \frac{9x^2yz}{y^3}$ y $B \times C = \frac{18yz}{x^3}$, cuál es $\frac{C}{A}$?
   A)$18xy^2$ B)$\frac{2y^3}{x^4}$ B)$\frac{9x^2}{y^2z}$ D)$18x^2yz$

Definición:
Factorizar es expresar una suma o diferencia de términos como el productor indicado de sus factores; éstos se presentan en forma más simple.

1. Factor Común

Es la expresión común que tienen todos los términos de una expresión algebraica.

Ejemplo 1.1. *Factoriza:* $x^6 - x^5 + x^2$.

Solución: Para encontrar el factor común se toma la letra que se repite y de menor exponente (para nuestro caso x^2), después cada uno de los términos de la expresión algebraica se divide entre el factor común:

$$\frac{x^6}{x^2} \qquad -\frac{x^5}{x^2} = -x^3 \qquad \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Los resultados se expresan de la siguiente manera:

$$x^6 - x^5 + x^2 = x^2(x^4 - x^3 + 1).$$

Ejemplo 1.2. *Factoriza:* $16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^10$.

Solución: Se busca el factor común de los coeficientes, que es el máximo común divisor de ellos y también se busca el factor común de los literales:

$$\text{MCD}(16, 12, 20) = 4 \qquad\qquad \text{Factor común literal} = a^3b^2$$

Se realizan las divisiones término a término y el resultado de la factorización es:

$$16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^10 = 4a^3b^2(4a^3b^5c - 3a^2c^3 + 5b^8).$$

Ejemplo 1.3. *Realiza la factorización de la expresión:* $18x^2 - 12x + 54$.

Solución: El máximo común de los coeficientes es 6 y no existe un factor común literal, por tanto, la expresión tiene sólo un factor común numérico y se expresa como:

$$18x^2 - 12x + 54 = 6(3x^2 - 2x + 9).$$

Ejemplo 1.4. *Factoriza:* $(2a - 3b)^2(5a - 7b)^3 - (2a - 3b)^3(5a - 7b)^2$.

Solución: En esta expresión el factor común está compuesto por binomios, por consiguiente, se toma de cada uno de ellos el de menor exponente y se realiza la factorización de la siguiente manera:

$$(2a-3b)^2(5a-7b)^3-(2a-3b)^3(5a-7b)^2 = (2a-3b)^2(5a-7b)^2\left[(5a-7b)-(2a-3b)\right].$$

Se reducen los términos semejantes del último factor:

$$\begin{aligned}(2a - 3b)^2(5a - 7b)^3 - (2a - 3b)^3(5a - 7b)^2 &= (2a - 3b)^2(5a - 7b)^2\left[5a - 7b - 2a + 3b\right]\\ &= (2a - 3b)^2(5a - 7b)^2\left[3a - 4b\right]\end{aligned}$$

Finalmente el resultado de la factorización es: $(2a - 3b)^2(5a - 7b)^2(3a - 4b)$.

Ejercicios Propuestos

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $a^2 + a$
2. $a^3b^2 - 2a^3b$
3. $a^4 + a^3 - a^2$
4. $18x^5 + 30x^4$
5. $48x^2 - 12x^3 - 24x^4$
6. $25b^2 + 35b^4 - 45b^5$

7. $11ax - 121a^2x + 33a^3$
8. $9a^5b - 12a^2b^3 + 15ab^2 - 18a^3b^4$
9. $9x^2 + 6x + 3$
10. $4x^4 - 8x^3 + 12x^2$
11. $6x^2 - 6xy - 6x$
12. $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$
13. $34ax^2 + 51a^2y - 68ay^2$
14. $55m^2n^3x + 110m^2n^3x^2 - 220m^3y^3$
15. $25x^7 - 10x^5 + 15x^3 - 5x^2$
16. $9a^2 - 12ab + 15a^3b^2 - 24ab^3$
17. $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n + 48m^5n^4$
18. $3a^2b + 6a^3b^2 - 5a^4b^3 + 8a^5b^4 + 4a^6b^5$
19. $16x^3y^2 - 8x^4y - 24x^2y - 40x^2y^3$
20. $100a^2b^3c - 150ab^2c^2 + 50ab^3c^3 - 200abc^2$
21. $93a^3x^2y - 62a^2x^3y^2 - 124a^2x$
22. $6x(3x-1)^2 + 2x^2(1-3x)^2$
23. $9(x+1) - 3(x+1)^2$
24. $x^2(x+2) - x(x+2)$
25. $4x^2(2x-5)^2 + 8x^2(2x-5)$
26. $(2x-1)(x+4) - (2x-1)(3x+1)$

2. Factor Común por Agrupación de Términos

Se agrupan los términos que tengan algún factor en común de tal modo que la expresión restante pueda factorizarse como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.1. *Factoriza* $am + bm + a^2 + ab$.

Solución: Se agrupan los términos y de los primeros se factoriza m y de los segundos a.

$$am + bm + a^2 + ab = (am + bm) + (a^2 + ab) = m(a+b) + a(a+b)$$

La última expresión se vuelve a factorizar tomando como factor común el binomio $a+b$ y se obtiene como resultado:

$$am + bm + a^2 + ab = (a+b)(m+a).$$

Ejemplo 2.2. *¿Cuál es el resultado de factorizar* $6ax + 3a^2 - 4bx - 2ab$*?*

Solución: Se agrupan los términos y se buscan los respectivos factores comunes para cada uno podemos factorizarlos y obtener como resultado:

$$6ax+3a^2-4bx-2ab = (6ax+3a^2)+(-4bx-2ab) = 3a(2x+a)-2b(2x+a) = (2x+a)(3a-2b).$$

Ejemplo 2.3. *Factoriza* $6a^2x + 4ab + 2a - 3abx - 2b^2 + b$.

Solución: Se repiten los mismos pasos anteriores y se obtiene:

$$\begin{aligned} 6a^2x + 4ab + 2a - 3abx - 2b^2 + b &= (6a^2x + 4ab + 2a) + (-3abx - 2b^2 + b) \\ &= 2a(3ax + 2b + 1) - b(3ax + 2b + 1) \\ &= (2a - b)(3ax + 2b + 1). \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $m^2 + mn + mx + nx$
2. $3x^2 - 1 - x^2 + 3x$
3. $ax - bx + ay - by$
4. $2y^3 - 6ay^2 - y + 3a$
5. $am - 2bm - 3an + 6bn$
6. $4a^2x - 5a^2y + 15by - 12bx$
7. $m^2p^2 - 3np^2 + m^2z^2 - 3nz^2$
8. $5m^2n + 5mp^2 + n^2p^2 + mn^3$
9. $3a - 2b - 2by^4 + 3ay^4$
10. $2mx^4 + 3nx^4 10m + 15n$
11. $bm^2 + by^2 - cm^2 - cy^2$
12. $x^3 - 15 - 5x + 3x^2$
13. $3bz - by - 9mz + 3my$
14. $a^3 + a^2 + a + 1$
15. $1 + 2a - 3a^2 - 6a^3$
16. $3x^3 - 7x^2 + 3x - 7$
17. $4a - 1 - 4ab + b$
18. $18m^3 + 12m^2 - 15m - 10$
19. $x^2yz - xz^2m + xy^2m - yzm^2$
20. $p^3t^3 + mn^2p^2t + m^2npt^2 + m^3n^3$

3. Diferencia de Cuadrados

La diferencia de cuadrados es de la forma $a^2 - b^2$ y su factorización es:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Lo que da como resultado el producto de binomios conjugados.

Ejemplo 3.1. *Factoriza la expresión:* $x^2 - 9$.

Solución: Se extrae la raíz cuadrada del primer y segundo términos; los resultados se acomodan como se indica en la fórmula.

$$\sqrt{x^2} = x \qquad\qquad \sqrt{9} = 3$$

Finalmente, la factorización es: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.

Ejemplo 3.2. *Factoriza:* $\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25}$.

Solución: Se aplica la fórmula y se obtiene el resultado:

$$\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25} = \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{5}\right).$$

Ejemplo 3.3. *¿Cuál es el resultado de factorizar* $x^{2a-4} - y^{6b}$.

Solución: Se expresan los exponentes de la siguiente manera:

$$x^{2(a-2)} - y^{2(3b)}$$

Se extraen las raíces cuadradas de ambos términos:

$$\sqrt{x^{2(a-2)}} = x^{a-2} \qquad\qquad \sqrt{y^{2(3b)}} = y^{3b}$$

Finalmente, se obtiene:

$$x^{2a-4} - y^{6b} = (x^{a-2} - y^{3b})(x^{a-2} + y^{3b}).$$

Ejemplo 3.4. *Factoriza la expresión:* $(2x+3)^2 - (x-1)^2$.

Solución: Se extrae la raíz cuadrada de cada uno de los términos:

$$\sqrt{(2x+3)^2} = 2x+3 \qquad\qquad \sqrt{(x-1)^2} = x-1$$

se sustituyen las raíces obtenidas en la fórmula:

$$(2x+3)^2 - (x-1)^2 = [(2x+3)+(x-1)]\,[(2x+3)-(x-1)]$$

Se reducen los términos semejantes de cada uno de los factores y se obtiene como resultado:

$$\begin{aligned}(2x+3)^2 - (x-1)^2 &= (2x+3+x-1)(2x+3-x+1)\\ &= (3x+2)(x+4)\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $x^2 - 1$
2. $x^2 - 49$
3. $81 - x^2$
4. $16x^2 - 9$
5. $a^4 - b^4$
6. $x^4 - 64$
7. $100 - 16x^2$
8. $36x^2 - 1$
9. $4 - 25x^2$
10. $4a^4 - 9b^2c^2$
11. $x^6 - 36$
12. $16a^4b^6 - c^6$
13. $x^2 - \frac{1}{4}$
14. $x^2 - \frac{4}{81}$
15. $x^2 - \frac{16}{49}$
16. $x^4 - \frac{1}{16}$
17. $49x^2 - \frac{16}{25}$
18. $x^{6a} - y^{4b}$
19. $a^{2x+6} - 9b^{6y}$
20. $m^{4a+8} - 25$
21. $1 - x^{2a}$
22. $-n^{8x+2y} + m^{6x-4y}$
23. $16x^{6a} - 49y^{2b}$
24. $(x-1)^2 - (y-3)^2$
25. $(2x+1)^2 - (y+5)^2$
26. $(x-1)^2 - 16y^2$
27. $4(3x-2)^2 - 9(x-1)^2$
28. $-(x+2y)^2 + 16(x+y)^2$
29. $25(4x-3)^2 - 9(2x+1)^2$
30. $49x^4 - 4(x^2-3x)^2$

4. Suma o Diferencia de Cubos

Dadas las expresiones de la forma: a^3+b^3 y a^3-b^3, para factorizarlas es necesario extraer la raíz cúbica del primer y segundo términos, para después sustituir los resultados en las respectivas fórmulas.

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \qquad\qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo 4.1. *Factoriza:* $27x^3 + 8$.

Solución: Se extrae la raíz cúbica de ambos términos:

$$\sqrt[3]{27x^3} = 3x \qquad\qquad \sqrt[3]{8} = 2$$

se sustituye en su fórmula respectiva, se desarrollan los exponentes y se obtiene:

$$\begin{aligned} 27x^3 + 8 =& (3x+2)\left((3x)^2 - (3x)(2) + (2)^2\right) \\ =& (3x+2)(9x^2 - 6x + 4) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2. *Factoriza:* $m^6 - 216$.

Solución: Se extraen las raíces cúbicas de los términos y se sustituye en la fórmula para obtener:

$$\begin{aligned} m^6 - 216 =& (m^2 - 6)\left((m^2)^2 + (m^2)(6) + (6)^2\right) \\ =& (m^2 - 6)(m^4 + 6m^1 + 36) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3. *Factoriza:* $x^{15} + 64y^3$.

Solución: Se realiza el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores para obtener:

$$\begin{aligned} x^{15} + 64y^3 =& (x^5 + 4y)\left((x^5)^2 - (x^5)(4y) + (4y)^2\right) \\ =& (x^5 + 4y)(x^{10} - 4x^5y + 16y^2) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4. *Factoriza la siguiente expresión:* $(x + y)^3 + (x - y)^3$.

Solución: Se extrae la raíz cúbica de los términos y se sustituyen en la respectiva fórmula:

$$\sqrt[3]{(x+y)^3} = x + y \qquad \sqrt[3]{(x-y)^3} = x - y$$

Al aplicar la factorización de la suma de cubos, desarrollar y simplificar se obtiene:

$$\begin{aligned} (x + y)^3 + (x - y)^3 &= ((x + y) + (x - y))\left((x + y)^2 - (x + y)(x - y) + (x - y)^2\right) \\ &= (x + y + x - y)(x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + y^2 + x^2 - 2xy + y^2) \\ &= 2x(x^2 + 3y^2) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5. *Factoriza la siguiente expresión:* $x - y$.

Solución: Se obtienen las raíces cúbicas de los elementos:

$$\sqrt[3]{x} \qquad \sqrt[3]{y}$$

Se aplica la factorización para una diferencia de cubos y el resultado es:

$$\begin{aligned} x - y &= \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)\left((\sqrt[3]{x})^2 - (\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{y}) + (\sqrt[3]{y})^2\right) \\ &= (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.6. *Factoriza la expresión:* $8a^{\frac{3}{2}}+27b^{\frac{6}{5}}$.

Solución: Las raíces cúbicas son:

$$\sqrt[3]{8a^{\frac{3}{2}}}=2a^{\frac{3}{(2)(3)}}=2a^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{27b^{\frac{6}{5}}}=3b^{\frac{6}{(5)(3)}}=3b^{\frac{2}{5}}$$

Se sustituyen las raíces en la fórmula y la factorización es:

$$\begin{aligned} 8a^{\frac{3}{2}}+27b^{\frac{6}{5}} &= \left[2a^{\frac{1}{2}}+3b^{\frac{2}{5}}\right]\left[\left(2a^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(2a^{\frac{1}{2}}\right)\left(3b^{\frac{2}{5}}\right)+\left(3b^{\frac{2}{5}}\right)^2\right] \\ &= \left[2a^{\frac{1}{2}}+3b^{\frac{2}{5}}\right]\left[4a-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{5}}+9b^{\frac{4}{5}}\right] \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $8x^3-1$
2. x^3+27
3. $8x^3+y^3$
4. $27a^3-b^3$
5. $8a^3+27b^6$
6. $64a^3-729$
7. $512-27a^9$
8. x^6-8y^{12}
9. $1-216m^3$
10. a^3-125
11. $27m^3+64n^9$
12. $343x^3-512y^6$
13. a^6+125b^{12}
14. $8x^6+729$
15. $27m^6+343n^9$
16. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$
17. $a^{\frac{3}{4}}-8b^{\frac{3}{4}}$
18. $x^{\frac{3}{3}}+125y^{\frac{9}{2}}$
19. $x^{3a+3}-y^{6a}$
20. $(x+2y)^3-(2x-y)^3$
21. $(x-y)^3+8y^3$
22. $27m^3-(3m+2n)^3$
23. $(a+b)^3-(2a+3b)^3$
24. $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^3+\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)^3$