ENCUENTRO # 8
TEMA:Radicales. Propiedades.

CONTENIDOS:

1. Propiedades de las potencias de exponente racional.
2. Radicales. Propiedades.
3. Simplificación de radicales.
4. Operaciones con radicales.

DESARROLLO

EJERCICIO RETO

1. ¿En cuál de las siguiente operaciones es incorrecto el resultado de la operación?
A)$\frac{3^0+3^0+3^0}{3^0} = 3$
B)$\frac{3^0+3^0+3^0}{3} = 3^0$
C)$\frac{3^0+3^0}{3^0} = 3^0$
D) $\frac{3+3+3}{3^0} = 3^2$
E)$\frac{3+3+3}{3^0+3^0+3^0} = 2 \cdot 3^0$

2. Al calcular la expresión $\frac{1{,}8\times 10^{2015}}{2\times 8^{2014}\times (\frac{5}{4})^{2014}}$ el resultado es:
A) 1 B)9×10^{2014} C) $3{,}6 \times 10^{2015}$ D) 9 A)9×10^{2015}

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL
Sea $\{a; b \in \mathbb{R}/a > 0 \wedge b > 0\}$ y $\{m, n, p, q \in \mathbb{Z}/n > 1 \wedge q > 1\}$, entonces se cumple que:

1. $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$
2. $a^{\frac{m}{n}} \times b^{\frac{m}{n}} = (a \times b)^{\frac{m}{n}}$
3. $a^{\frac{m}{n}} \div a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$
4. $a^{\frac{m}{n}} \div b^{\frac{m}{n}} = (a \div b)^{\frac{m}{n}}$
5. $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}}$
6. $(a)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

$\rightsquigarrow$ Aplica las propiedades de las potencias y simplifica en los casos posibles:

1. $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2}}$
2. $a^{-\frac{1}{4}} \times a^{\frac{4}{6}} \times a^{\frac{2}{3}}$
3. $x^{\frac{2}{3}} \times y^{\frac{1}{6}} \times x^{\frac{1}{2}}$
4. $(x^6)^{\frac{1}{2}}$
5. $(x^5)^{-\frac{1}{2}}$
6. $[a^{\frac{3}{2}}]^{\frac{4}{9}}$
7. $[2a^4b^6]^{\frac{3}{2}}$
8. $a^{-\frac{1}{2}} \times b^{-\frac{1}{2}}$

Radicación

Operación que permite hallar un valor que multiplicado tantas veces como lo indica el índice, dé el valor que se encuentra dentro del radical, el cual recibe el nombre de radicando. Para lo anterior se define:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ donde } a \text{ es el radicando(cantidad subradical)},$$
$$m \text{ exponente del radicando y } n \text{ índice de la raíz.}$$

<u>Ejemplo:</u>

1. Expresa las siguiente potencias como radicales $x^{\frac{2}{3}}$.
   Solución
   La base de la potencia x es la cantidad subradical su exponente es 2 y el índice de la raíz es 3.
   $$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$
2. Convierte a radical la siguiente expresión $3^{\frac{4}{5}}$
   Solución
   La base de la potencia 3 es la cantidad subradical su exponente es 4 y el índice de la raíz es 5.
   $$3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{81}$$
3. Expresa el siguiente radical $\sqrt[7]{2^3}$ como una potencia.
   Solución
   La cantidad subradical es la base de la potencia y su exponente es la división del exponente de la cantidad subradical con el índice de la raíz o sea $\frac{3}{7}$.
   $$\sqrt[7]{2^3} = 2^{\frac{3}{7}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

$\rightsquigarrow$ Convierte de potencia a radical o viceversa según el caso.

1. $\sqrt[4]{27}$
2. $7^{\frac{4}{3}}$
3. $81^{\frac{1}{5}}$
4. $\sqrt{12}$
5. $\sqrt[6]{64}$
6. $100^{\frac{1}{2}}$
7. $\sqrt[3]{8x^6}$
8. $(25y^4)^{\frac{1}{4}}$

PROPIEDADES DE LOS RADICALES

$$
\begin{array}{rcl}
a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (a \times b)^{\frac{1}{n}} & \Rightarrow & \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b} \\
a^{\frac{1}{n}} \div b^{\frac{1}{n}} = (a \div b)^{\frac{1}{n}} & \Rightarrow & \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b} \\
(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} & \Rightarrow & (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \\
(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \times m}} & \Rightarrow & \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a} \\
a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}} & \Rightarrow & \sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}
\end{array}
$$

Simplificación

Procedimiento que consiste en expresar un radical en su forma más simple. Para simplificar un radical, el exponente de la base debe ser mayor que el índice del radical.

Ejemplo:

1. Simplifica $\sqrt{8}$

   Solución

   Se descompone el radicando en factores primos.

   $$\sqrt{8} = \sqrt{2^3}$$

   2^3 se expresa como $2^2 \cdot 2$y se aplica la propiedad correpondiente de los radicales.

   $$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

   Por consiguiente, la simplificación de $\sqrt{8}$ es $2\sqrt{2}$

2. Simplifica $\sqrt{45}$

   Solución

   Se descompone el radicando en factores primos y se procede a aplicar los propiedades.

   $$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

   Por tanto, $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

3. Simplifica $\sqrt[3]{72}$
   Solución
   Se descompone la base en factores primos y se simplifica la expresión.

$$\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 2\sqrt[3]{9}$$

4. Simplifica $\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}$
   Solución
   Se simplifica el radical y el resultado se multiplica por la fracción para obtener el resultado de la operación.

$$\frac{1}{2}\sqrt[5]{96} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Simplifica las siguientes expresiones:

1. $\sqrt{20}$
2. $\sqrt{72}$
3. $\sqrt[3]{16}$
4. $\sqrt[3]{135}$
5. $\sqrt[3]{250}$
6. $\sqrt{162}$
7. $\sqrt{180}$
8. $2\sqrt[4]{405}$
9. $\frac{2}{7}\sqrt[3]{648}$
10. $\frac{1}{3}\sqrt{540}$
11. $\frac{2}{5}\sqrt[4]{1250}$
12. $\frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{3600}}$

Suma y resta

Estas operaciones se pueden efectuar si y sólo si el índice del radical y el radicando son iguales (radicales semejantes).

$$a\sqrt[n]{d} + b\sqrt[n]{d} - c\sqrt[n]{d} = (a + b - c)\sqrt[n]{d}$$

Ejemplos:

1. Efectúa $2\sqrt[3]{5} + 11\sqrt[3]{5}$.
   Solución
   Los radicales son semejantes, por tanto se realizan las operaciones con los números que les anteceden (coefi cientes del radical).

$$2\sqrt[3]{5} + 11\sqrt[3]{5} = (2 + 11)\sqrt[3]{5} = 13\sqrt[3]{5}$$

2. ¿Cuál es el resultado de la operación $2\sqrt{2}+7\sqrt{2}-4\sqrt{2}$.
   Solución
   Al ser semejantes los radicales, se efectúan las operaciones con los coeficientes.
$$2\sqrt{2}+7\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(3+7-4)\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$
3. Efectúa $\frac{3}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{6}\sqrt{6}$.
   Solución
   Se realizan las operaciones con las fracciones y se obtiene el resultado.
$$\tfrac{3}{4}\sqrt{6}-\tfrac{1}{6}\sqrt{6}=(\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{6})\sqrt{6}=\tfrac{7}{12}\sqrt{6}$$

NOTA: Si los radicandos son diferentes, no se pueden sumar o restar los radicales de primera instancia, entonces se simplifican; si resultan semejantes se efectúan las operaciones, de lo contrario, se dejan indicadas.

Ejemplos:

1. ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$.
   Solución
   Se simplifican los radicales y se realiza la operación.
$$\begin{aligned}\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}&=\sqrt{2^2\cdot 5}+\sqrt{3^2\cdot 5}-\sqrt{2^4\cdot 5}\\&=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-2^2\sqrt{5}=(2+3-4)\sqrt{5}=\sqrt{5}\end{aligned}$$
2. Efectúa $\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}$.
   Solución
   Se simplifi can los radicales, se realizan las operaciones y se obtiene el resultado final.
$$\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}=\sqrt[3]{3^3\cdot 7}+\sqrt[3]{2^3\cdot 7}=3\sqrt[3]{7}+2\sqrt[3]{7}=5\sqrt[3]{7}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Realiza las siguientes operaciones.

1. $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}$
2. $\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4\sqrt{3}$
3. $3\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{5}$
4. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{9}$
5. $\frac{5}{3}\sqrt[4]{7}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{7}$
6. $\sqrt{8}+\sqrt{18}$

7. $\sqrt{12} - \sqrt{3}$
8. $2\sqrt{5} + \sqrt{80}$
9. $4\sqrt{32} - 7\sqrt{8} - 3\sqrt{18}$
10. $\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{45}$
11. $3\sqrt{12} - 2\sqrt{5} - 7\sqrt{3} + \sqrt{125}$
12. $\sqrt{200} + \sqrt{50} - \sqrt{98} - \sqrt{338}$
13. $\frac{1}{4}\sqrt{192} - \frac{2}{5}\sqrt{75} + \frac{1}{7}\sqrt{147}$
14. $\frac{3}{4}\sqrt{176} - \frac{2}{3}\sqrt{45} + \frac{1}{8}\sqrt{320} + \frac{1}{5}\sqrt{275}$
15. $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{192}$
16. $3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{375}$
17. $\frac{2}{5}\sqrt[3]{250} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{128} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{54}$

Multiplicación

Multiplicación de radicales con índices iguales. Cuando los índices de los radicales son iguales, se multiplican los radicandos y de ser posible se simplifica el resultado.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c}$$

Ejemplos:

1. Efectúa $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$
   Solución
   Se multiplican ambos factores:
   $$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{(3)(3)} = \sqrt{15}$$
2. ¿Cuál es el resultado del producto $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$?
   Solución
   Se realiza el producto y se simplifica el resultado.
   $$\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{(6)(3)(2)} = \sqrt{36} = 6$$
3. Realiza $(2\sqrt[3]{4})(3\sqrt[3]{10})$.
   Solución
   Se multiplica y simplifica el resultado.
   $$\begin{aligned}(2\sqrt[3]{4})(3\sqrt[3]{10}) &= 6\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{10} = 6\sqrt[3]{(4)(10)} = 6\sqrt[3]{40} = 6\sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = 6\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}} \cdot \sqrt[3]{5} \\ &= 6 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{5} = 12\sqrt[3]{5}\end{aligned}$$

Multiplicación de radicales con índices diferentes. Para multiplicar radicales con índices diferentes se busca un índice común, que resulta del mínimo común múltiplo de los índices de los radicales y recibe el nombre de“mínimocomún índice”.

Ejemplos:

1. ¿Cuál es le resultado de $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{5}$.
   Solución
   El mínimo común índice es 6, entonces los índices de los radicales se convierten a dicho índice.

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3\times 2]{(2)^2} = \sqrt[6]{2^2} \text{ además } \sqrt{5} = \sqrt[2\times 3]{(5)^3} = \sqrt[6]{5^3}$$

   Se efectúa el producto y se observa que no se puede simplificar el radical, por consiguiente se desarrollan las potencias y se realiza la multiplicación.

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 5^3} = \sqrt[6]{4 \cdot 125} = \sqrt[6]{500}$$

2. Efectúa $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{8}$.
   Solución
   Se descompone 8 en factores primos y el mínimo común índice es 4, por lo tanto, al transformar los radicales seobtiene:

$$\sqrt[2\times 2]{(2)^2} = \sqrt[4]{2} \text{ y } \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3}$$

   Se efectúa la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 2^3} = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2} = \sqrt[\cancel{4}]{2^{\cancel{4}}} \cdot \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Realiza las siguientes Multiplicaciones.

1. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$
2. $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$
3. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$
4. $\sqrt{15} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{27}$
5. $(2\sqrt{2})(5\sqrt{6})(\sqrt{12})$
6. $\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{9}$
7. $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$
8. $\sqrt[5]{96} \cdot \sqrt[3]{3}$
9. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$
10. $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4}$
11. $(3\sqrt[3]{4})(2\sqrt[4]{5})$
12. $(\frac{3}{3}\sqrt{6})(\frac{2}{6}\sqrt[6]{12})$
13. $(\frac{1}{2}\sqrt[6]{6})(\frac{1}{4}\sqrt[3]{2})$

División

División de radicales con índices iguales. Se realiza de forma análoga a la multiplicación de radicales con índices semenjantes.

Ejemplos:

1. Realiza $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$
   Solución
   Los radicales son de igual índice, entonces se dividen los radicandos.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2ffl}} = \sqrt{5}$$

2. ¿Cuál es el resultado de $\frac{6\sqrt{28}}{\sqrt{63}}$.
   Solución
   Se simplifi can los radicales y se realiza la operación.

$$\frac{6\sqrt{28}}{\sqrt{63}} = \frac{6\sqrt{2^2 \cdot 7}}{\sqrt{3^2 \cdot 7}} = \frac{6\sqrt{2^2}\sqrt{7}}{\sqrt{3^2}\sqrt{7}} = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4$$

División de radicales con índices diferentes. Se transforman los radicales a un índice común y después se realiza la división.

Ejemplo:

1. Halla el cociente de $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}}$.
   Solución
   Se transforman los índices de los radicales a 12 y se realiza la operación.

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[4\times 3]{(2^3)^3}}{\sqrt[3\times 4]{(22)^4}} = \frac{\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^8}} = \sqrt[12]{\frac{2^9}{28}} = \sqrt[12]{2}$$

2. ¿Cuál es el resultado de $frac 6\sqrt{12} + 2\sqrt[3]{6} 2\sqrt{3}$?
   Solución
   Se divide cada término del numerador entre el denominador y se obtiene:

$$\frac{6\sqrt{12}+2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{12}}{2\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt{\frac{12}{3}} + \frac{\sqrt[3\times 2]{(2\cdot 3)^2}}{\sqrt[2\times 3]{3^3}} = 3\sqrt{4} + \frac{\sqrt[6]{22 \cdot 3^2}}{\sqrt[6]{3^3}}$$
$$= 3(2) + \sqrt[6]{\frac{2^2 \cdot 3^2}{3^3}} = 6 + \sqrt[6]{2^2 \cdot \frac{1}{3}} = 6\sqrt[6]{\frac{4}{3}}$$

Para **introducir una cantidad a un radical**, se debe elevar la cantidad a un exponente igual al índice del radical.

Ejemplo:

1. Realiza $\frac{\sqrt{48}}{2}$.
   Solución
   El divisor se expresa como $2 = \sqrt{2^2}$ y se realiza la operación para obtener el resultado.
   $$\frac{\sqrt{48}}{2} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{2^2}} = \sqrt{\frac{48}{2^2}} = \sqrt{\frac{48}{4}} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$
2. Introduce el factor en el radical.
   $a \cdot \sqrt[5]{b^3c^2}$
   Solución
   Se expresa a como $a = \sqrt[5]{a^5}$ y luego se multiplican los radicales
   $$a \cdot \sqrt[5]{b^3c^2} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{b^3c^2} = \sqrt[5]{a^5b^3c^2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$
2. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$
3. $\frac{5\sqrt{120}}{6\sqrt{40}}$
4. $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}$
5. $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[3]{4}}$
6. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$
7. $\frac{\sqrt[7]{6}}{\sqrt[14]{3}}$
8. $\frac{\sqrt{200}-\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$
9. $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[6]{6}}{\sqrt{2}}$
10. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}$
11. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[5]{16}}{\sqrt{8}}$

Racionalización

Racionalizar es representar una fracción en otra equivalente que contenga una raíz en el numerador, cuyo numerador o denominador sea un número racional respectivamente.
Racionalización del denominador. Dada la expresión de la forma $\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}$, se racionaliza de la siguiente manera:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{c}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{c \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}} = \frac{c \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{c \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

Ejemplos:

1. Transforma $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en otra expresión equivalente que carezca de raíz en el denominador.
   Solución
   La fracción $\frac{1}{\sqrt{3}}$ se multiplica por $\sqrt{3^{2-1}} = \sqrt{3}$ tanto el denominador como el numerador.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. Racionaliza la expresión $\sqrt{\frac{2}{5}}$
   Solución
   Se debe separar la expresión en raíces y se multiplican por $\sqrt{5^{2-1}}=\sqrt{5}$ tanto el numerador como denominador, para obtener el resultado:

$$\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5^2}}=\frac{10}{5}$$

Racionalización de un denominador binomio. Para racionalizar una fracción cuyo denominador es un binomio $(a\pm b)$ y alguno o ambos elementos tienen una raíz cuadrada, se multiplica por el conjugado del binomio $(a\mp b)$.

$$\frac{c}{a\pm b}=\frac{c}{a\pm b}\cdot\frac{a\mp b}{a\mp b}=\frac{c(a\mp b)}{a^2-b^2}$$

Ejemplo:

1. Racionaliza la expresión $\frac{3}{1+\sqrt{2}}$.
   Solución
   Se multiplica el numerador y el denominador de la expresión por $1-\sqrt{2}$, que es el conjungado del denominador $1+\sqrt{2}$.

$$\frac{3}{1+\sqrt{2}}=\frac{3}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{3(1-\sqrt{2})}{1^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{3-3\sqrt{2}}{1-2}=\frac{3-3\sqrt{2}}{-1}=3\sqrt{2}-3$$

2. Racionaliza la expresión $\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.
   Solución
   Se multiplica por el conjugado del denominador y se simplifica para obtener el resultado.

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{(5-3}=\frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{2}$$

3. Racionaliza $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.
   Solución
   Se multiplica al numerador y denominador por $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$ y se efectúa la simplificación.

$$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{6(\sqrt{3})^2+3\sqrt{6}-4\sqrt{6}-2(\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{18-\sqrt{6}-4}{12-2}=\frac{14-\sqrt{6}}{10}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Racionaliza los siguientes denominadores:

1. $\frac{2}{\sqrt{5}}$
2. $\frac{3}{\sqrt{3}}$
3. $\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$
4. $\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$
5. $\frac{12}{\sqrt{6}}$
6. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
7. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{20}}$
8. $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{30}}{\sqrt{5}}$
9. $\frac{8}{3+\sqrt{7}}$
10. $\frac{4}{\sqrt{6}-2}$
11. $\frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
12. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$
13. $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
14. $\frac{2}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$