ENCUENTRO # 7
TEMA: Propiedades de las potencias de exponente entero

CONTENIDOS:

1. Potenciación. Cálculo de potencias.
2. Propiedades de las potencias de exponente entero.
3. Notación científica

DESARROLLO

EJERCICIO RETO

1. Cuatro personas juntaron sus ahorros para abrir un negocio aportando el 15 %, 20 %, 25 % y 40 %, respectivamente, del monto total. Si la menor de las aportaciones fue de C$9; 000, la mayor de las aportaciones fue de:
a) 10 500 b) 12 000 c) 24 000 d) 60 000

2. Una epidemia mató los $\frac{5}{8}$ de las reses de un ganadero y luego él vendió los $\frac{2}{3}$ de las que le quedaban. Si aún tiene 216 reses, ¿Cuántas tenía al principio, cuántas murieron y cuántas vendió?

a) 1600; 950; 220 b) 1728; 1080; 432 c) 1539; 1080; 243 d) 1600; 84; 1300

Potenciación
Es la operación en la cual la cantidad llamada base se debe multiplicar por ella misma las veces que lo indique el exponente. De lo anterior se define:
$\rightarrow a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a_n}_{n-veces}$, donde a es la base de la potencia y n el exponente.
Ejemplo:

1. Calcula 7^2.
Solución
Al ser el exponente 2, la base 7 se debe multiplicar 2 veces ella misma:
$7^2 = 7 \times 7 = 49$

2. ¿Cuál es el resultado de calcular $\left(\frac{1}{2}\right)^3$
   Solución
   La fracción se debe multiplicar 3 veces por ella misma.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

NOTA:
Sea a^n un potenicas donde $\{a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}\}$, entonces:
$\rightarrow$ Si n es par el resultado de calcular a^n siempre es positivo.
$\rightarrow$ Si n es impar el resultado de a^n siempre conserva el signo de la base de la potencia.
Ejemplo:

1. ¿Cuál es le valor numéricos de $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$.
   Solución

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$$

2. Calcula$\left(-\frac{2}{3}\right)^3$
   Solución

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$$

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

Sea $a; b \in \mathbb{R}$ y $r; s \in \mathbb{Z}$, entonces se cumple que:

1. $a^r \times a^s = a^{r+s}$
2. $a^r \times b^r = (a \times b)^r$
3. $a^r \div a^s = a^{r-s}$
4. $a^r \div b^r = (a \div b)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r$
5. $(a^r)^s = a^{r \times s}$
6. $a^0 = 1$
7. $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$

Ejemplo:
Calcula aplicando las propiedades de las potencias.

1. $4^3 \times 2^3$
   Solución
   Es una multiplicación de potencias de bases iguales y exponentes diferentes por lo tanto se multiplican las bases y se matiene el exponente $4^3 \times 2^3 = (4 \times 2)^3 = 8^3 = 512$

2. $(\frac{4}{7})^2 = \frac{4^2}{7^2} = \frac{16}{49}$

3. Simplifique la expresión: $\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^{-2}$

   Solución

   $\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^{-2} = \left[\frac{\frac{1^3}{2^3}}{\frac{2^2}{3^2}}\right]^{-2} = \left[\frac{1^3\times 3^2}{2^3\times 2^2}\right]^{-2} = \left[\frac{3^2}{2^5}\right]^{-2} = \frac{(3^2)^{-2}}{(2^5)^{-2}} = \frac{3^{-4}}{2^{-10}} = \frac{\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{2^{10}}}$
   $= \frac{2^{10}}{3^4} = \frac{1024}{81}$

4. Simplifica $\left(\frac{2^{-4}}{2^{-2}-2^{-3}}\right)^{-2}$

   Solución

   En este ejercicio primero se aplica el teorema correspondiente a los números que se encuentran dentro del paréntesis, después se realizan las operaciones.

$$\left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}}\right)^{-2} = \left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}\right)^{-2} = \left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{8}}\right)^{-2} = \left(\frac{2^3}{2^4}\right)^{-2} = 2^{-1} = 2^2 = 4$$

Ejercicios Propuestos

⇝ Completa los espacios en blanco de forma tal que obtengas proposiciones verdaderas:

1. $a^7 \times a^{\square} = a^{16}$
2. $a^{\square} \times a^3 = a^{\square}$
3. $(a^2)^{\square} = a^{\square}$
4. $a^6 \div a^{\square} = a$
5. $a^{\square} \div a^{\square} = a^{\square} = 1$
6. $a^{\square} \div a^{\square} = a^{\square} = \frac{1}{a^2}$
7. $a^{\square} \div a^{\square} = 1$

⇝ Simplifica las siguientes expresiones, emplea las propiedades de las potencias.

1. $5^2 \times 5^2$
2. $3^{-5} \times 3^2$
3. $3^2 \times 3^{-3} \times 3\frac{2}{3}$
4. $(2^7 \times 3^{-4})(2^{-5} \times 3^4)$
5. $(3^5 \times 5^{-4})(2^3 \times 3^{-7} \times 5^6)$
6. $4^2 \times 2^3 \times 8^2$
7. $\frac{6^7}{6^4}$
8. $\frac{5^8}{5^1 0}$
9. $\frac{3^{-6}}{3^{-10}}$
10. $\frac{5^4}{5^4}$
11. $\frac{2^7\times 3^{-5}}{2^5\times 3^{-4}}$
12. $\frac{3^5\times 4^{-6}}{3^7\times 4^{-8}}$

13. $\frac{7^5\times 3^3}{7^3\times 3^5}$

14. $\left(\frac{2^2\times 3^5\times 4^2}{2^4\times 3^2}\right)$

15. $\left(\frac{7^{-1}}{2^{-1}+3^{-1}+6^{-1}}\right)^{-2}$

Notación Científica

La notación científica se utiliza para expresar cantidades en función de potencias de 10 y por lo regular se usa para cantidades muy grandes o muy pequeñas.
Potencias de 10

$$
\begin{array}{cc}
0{,}1 = 10^{-1} & 10 = 10^1 \\
0{,}01 = 10^{-2} & 100 = 10^2 \\
0{,}001 = 10^{-3} & 1000 = 10^3 \\
0{,}0001 = 10^{-4} & 10000 = 10^4 \\
0{,}00001 = 10^{-5} & 100000 = 10^5
\end{array}
$$

Para expresar una cantidad en notación científica el punto se recorre una posición antes de la primera cifra, si la cantidad es grande, o un lugar después de la primera cifra si la cantidad es pequeña. El número de lugares que se recorre el punto decimal es el exponente de la base 10.
Ejemplo:

1. Expresa en notación científica 2 345 000.
   Solución
   Se coloca el 2 como cifra entera, 345 como parte decimal (2.345) y se indica la multiplicación por 10 con exponente 6, ya que fue el número de cifras que se recorrió el punto a la izquierda.

$$2345000 = 2{,}345\times 10^6$$

2. Expresa en notación científi ca 25 300.
   Solución
   El punto decimal se recorre cuatro posiciones a la izquierda, por tanto,

$$25300 = 2{,}53\times 10^4$$

3. Un satélite gira en una órbita circular de 820 000 km sobre la superficie terrestre. Expresar esta cantidad en notación científica.
   Solución
   La órbita del satélite expresada en notación científica es:

$$820000 = 8{,}2 \times 10^5 km$$

Cuando los números son pequeños, el punto decimal se recorre hacia la derecha hasta dejar como parte entera la primera cifra significativa y el exponente del número 10 es de signo negativo.

Ejemplo:

1. Escribe en notación científica 0.043.
   Solución
   El punto decimal se recorre 2 lugares hacia la derecha y el resultado se expresa como:

$$0{,}043 = 4{,}3 \times 10^{-2}$$

2. Representa en notación científica 0.000000386.
   Solución
   Se recorre el punto decimal 7 lugares de izquierda a derecha, por consiguiente,

$$0{,}000000386 = 3{,}86 \times 10^{-7}$$

3. La longitud de una bacteria es de 0.000052 m, expresa esta longitud en notación científica.
   Solución
   La longitud de la bacteria expresada en notación científica es:

$$0{,}000052 = 5{,}2 \times 10^{-5}$$

Ejercicios propuestos

⇝ Expresa en notación científica las siguientes cantidades:

1. 4 350
2. 16 000
3. 95 480
4. 273 000
5. 670 200
6. 350 000 000
7. 5 342 000
8. 18 600 000
9. 0.176

10. 0.0889
11. 0.00428
12. 0.000326
13. 0.000000462
14. 0.00000003
15. 0.0000000879
16. 0.0000000012
17. 0.000000000569
18. 0.0000000000781

Escritura en forma desarrollada. El número $a \times 10^n$ se expresa en forma desarrollada de las siguientes formas:
$\rightsquigarrow$ Si el exponente n es positivo, entonces indica el número de posiciones que se debe recorrer el punto decimal a la derecha y los lugares que no tengan cifra son ocupados por ceros.
Ejemplos:

1. Expresa en su forma desarrollada $3{,}18 \times 10^3$.
   Solución
   El exponente 3 indica que el punto se deberá recorrer 3 lugares hacia la derecha, esto es:
   $$3{,}18 \times 10^3 = 3180$$
2. Escribe en su forma desarrollada $25{,}36 \times 10^6$. **Solución**
   El exponente 6 indica el número de lugares que se recorren hacia la derecha y los lugares que no tengan cifra serán ocupados por ceros.
   $$25{,}36 \times 10^6 = 25360000$$

$\rightsquigarrow$ Si el exponente n es negativo, entonces indica el número de posiciones que se debe recorrer el punto decimal a la izquierda y los lugares que no tengan cifra son ocupados por ceros.
Ejemplos:

1. Expresa en notación desarrollada $7{,}18 \times 10^{-14}$
   Solución
   En este número, el punto decimal se recorre 4 lugares hacia la izquierda.
   $$7{,}18 \times 10^{-14} = 0{,}000718$$
2. Escribe en su forma desarrollada 8×10^{-2}.
   Solución
   Se recorren 2 lugares hacia la izquierda, por lo tanto,
   $$8 \times 10^{-2} = 0{,}08$$

Ejercicios propuestos

⇝ Escribe en su forma desarrollada las siguientes cifras:

1. 60×10^4
2. $0{,}1 \times 10^{-2}$
3. $37{,}6 \times 10^5$
4. 6×10^{-3}
5. $4{,}2 \times 10^2$
6. $72{,}4 \times 10^{-5}$
7. 1×10^{-6}
8. $8{,}3 \times 10^{-4}$
9. $1{,}05 \times 10^7$
10. $2{,}34 \times 10^{-1}$
11. $3{,}264 \times 10^2$
12. $62{,}34 \times 10^{-1}$
13. $2{,}4 \times 10^{-2}$
14. $3{,}01 \times 10^{-4}$
15. $4{,}14501 \times 10^8$
16. $3{,}002 \times 10^{-7}$

Suma y resta

Para efectuar estas operaciones es necesario que la base 10 tenga el mismo exponente.

$$a \times 10^n + c \times 10^n = (a + c)10^n$$

Ejemplo:

1. Efectúa $3{,}5 \times 10^{-6} + 1{,}83 \times 10^{-6}$
   Solución
   Como los exponentes de la base 10 son iguales, se suman las cifras y la potencia de 10 permanece constante.
   $$3{,}5 \times 10^{-6} + 1{,}83 \times 10^{-6} = (3{,}5 + 1{,}83) \times 10^{-6} = 5{,}33 \times 10^{-6}$$

2. ¿Cuál es el resultado de $2{,}73 \times 10^{-4} - 1{,}25 \times 10^{-4}$?
   Solución
   Como los exponentes de la base 10 son iguales, se realiza la operación de la siguiente manera:
   $$2{,}73 \times 10^{-4} - 1{,}25 \times 10^{-4} = (2{,}73 - 1{,}25) \times 10^{-4} = 1{,}48 \times 10^{-4}$$

⇝ Cuando los exponentes de la base 10 sean diferentes, se recorre el punto decimal para igualarlos y después se efectúa la operación.

Ejemplo:

1. Efectúa $1{,}34 \times 10^6 + 2{,}53 \times 10^5$
   Solución
   Se escoge una de las cifras para igualar los exponentes, en este caso se expresa a exponente 5.
   $$1{,}34 \times 10^6 = 1340000 = 13{,}4 \times 10^5$$

Luego, la operación resulta:

$$1{,}34\times10^6+2{,}53\times10^5 = 13{,}4\times10^5+2{,}53\times10^5 = (13{,}4+2{,}53)\times10^5 = 15{,}93\times10^5$$

Esta misma operación se realiza convirtiendo a exponente 6 y el resultado no se altera, entonces,

$$2{,}53 \times 10^5 = 253000 = 0{,}253 \times 10^6$$

Luego, al sustituir:

$$1{,}34 \times 10^6 + 2{,}53 \times 10^5 = 1{,}34 \times 10^6 + 0{,}253 \times 10^6 = 1{,}593 \times 10^6$$

2. Halla el resultado de $2{,}82 \times 10^{-5} - 1{,}1 \times 10^{-6}$
   Solución
   Se convierte a exponente -6, y el resultado

$$2{,}82\times10^{-5}-1{,}1\times10^{-6} = 28{,}2\times10^{-6}-1{,}1\times10^{-6} = (28{,}2-1{,}1)\times10^{-6} = 27{,}1\times10^{-6}$$

Ahora bien, si se convierte a exponente -5, entonces,

$$2{,}82 \times 10^{-5} - 0{,}11 \times 10^{-5} = (2{,}82 - 0{,}11) \times 10^{-5} = 2{,}71 \times 10^{-5}$$

Por consiguiente, $2{,}82 \times 10^{-5} - 1{,}1 \times 10^{-6} = 27{,}1 \times 10^{-6}$ o $2{,}71 \times 10^{-5}$

Ejercicios Propuestos

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $3{,}18 \times 10^6 + 1{,}93 \times 10^6$
2. $8{,}1 \times 10^{-4} + 2{,}3 \times 10^{-4}$
3. $4{,}3 \times 10^{-5} - 3{,}2 \times 10^{-5}$
4. $1{,}1 \times 10^4 - 0{,}91 \times 10^4$
5. $13{,}1 \times 10^6 - 0{,}29 \times 10^7$
6. $25{,}34 \times 10^{-3} + 1{,}82 \times 10^{-2}$
7. $3{,}83 \times 10^4 + 5{,}1 \times 10^3 - 0{,}2 \times 10^5$
8. $8{,}72 \times 10^{-3} - 0{,}3 \times 10^{-2} + 0{,}1 \times 10^{-4}$

9. $4 \times 10^6 - 0{,}23 \times 10^6 - 25 \times 10^5$

10. $1{,}18 \times 10^{-5} + 3{,}4 \times 10^{-5} - 0{,}12 \times 10^{-4}$

11. $2{,}03 \times 10^3 + 3{,}02 \times 10^2 - 0{,}021 \times 10^5$

12. $1{,}02 \times 10^{-2} + 0{,}023 \times 10^{-1} + 2{,}34 \times 10^{-3}$

13. $7{,}023 \times 10^3 + 1{,}03 \times 10^2 - 4{,}002 \times -0{,}023 \times 10^2$

14. $8{,}2 \times 10^{-4} + 2{,}003 \times 10^{-3} - 2{,}89 \times 10^{-4} + 7{,}23 \times 10^{-3}$

15. $5{,}04 \times 10^{-2} + 12 \times 10^{-3} - 2{,}4 \times 10^{-2} + 852 \times 10^{-4}$

Multiplicación y división

$\rightsquigarrow$ Para multiplicar o dividir un número en notación científica por o entre un número real cualquiera, se afecta sólo a la primera parte del número.

$$a(b \times 10^n) = (a \times b) \times 10^n; \qquad \tfrac{b \times 10^n}{a} = (b \div a) \times 10^n \text{ con } a \neq 0 \text{ para la división}$$

Ejemplo:

1. ¿Cuál es el resultado de $3(5{,}2 \times 10^7)$?
   Solución
   Se efectúa el producto de 3 por 5.2, la base 10 y su exponente no se alteran.

$$3(5{,}2 \times 10^7) = (3 \times 5{,}2) \times 10^7 = 15{,}6 \times 10^7 = 1{,}56 \times 10^8$$

2. Efectúa $\frac{3{,}5 \times 10^{-6}}{5}$
   Solución
   Se realiza la división de 3.5 entre 5 mientras que la base 10 y su exponente no se alteran.

$$\tfrac{3{,}5 \times 10^{-6}}{5} = (\tfrac{3{,}5}{5}) \times 10^{-6} = 0{,}7 \times 10^{-6} = 7 \times 10^{-7}$$

$\rightsquigarrow$ Para multiplicar o dividir números escritos en notación científica, se efectúa la multiplicación o división en las primeras partes y para la base 10 se aplican las leyes de los exponentes.

$$(a \times 10^m)(b \times 10^n) = (a \times b) \times 10^{m+n} \qquad \tfrac{a \times 10^m}{b \times 10^n} = (a \div b) \times 10^{m-n}$$

Ejemplos:

1. Efectúa la siguiente operación $(8{,}2 \times 10^{-5})(4{,}1 \times 10^{-3})$
   Solución
   Se multiplican 8.2 por 4.1 y los exponentes de la base 10 se suman.
   $$(8{,}2 \times 10^{-5})(4{,}1 \times 10^{-3}) = (8{,}2 \times 4{,}1)10^{-5+(-3)} = 33{,}62 \times 10^{-}8 = 3{,}363 \times 10^{-7}$$

2. Determina el resultado de $\frac{(4{,}25\times10^{6})(2{,}01\times10^{-2})}{2{,}5\times10^{8}}$
   Solución
   Se realiza la multiplicación y posteriormente la división para obtener el resultado.
   $$\frac{(4{,}25\times10^{6})(2{,}01\times10^{-2})}{2{,}5\times10^{8}} = \frac{(4{,}25\times2{,}01)(10^{6}\times10^{-2})}{2{,}5\times10^{8}} = \frac{8{,}5425\times10^{4}}{2{,}5\times10^{8}} = \frac{8{,}5425}{2{,}5}\times10^{4-8} = 3{,}417\times10^{-4}$$

3. ¿Cuál es el resultado de $\frac{(3{,}2\times10^{-5})(4{,}1\times10^{-7}-21\times10^{-8})}{2{,}3\times10^{-13}+0{,}27\times10^{-12}}$?
   Solución
   Se realizan las sumas y restas, posteriormente la multiplicación y la división para obtener el resultado final.
   $$\frac{(3{,}2\times10^{-5})(4{,}1\times10^{-7}-21\times10^{-8})}{2{,}3\times10^{-13}+0{,}27\times10^{-12}} = \frac{(3{,}2\times10^{-5})(4{,}1\times10^{-7}-2{,}1\times10^{-7})}{2{,}3\times10^{-13}+2{,}7\times10^{-13}} = \frac{(3{,}2\times10^{-5})(2\times10^{-7})}{5\times10^{-13}}$$
   $$\frac{(3{,}2\times2)\times10^{-5+(-7)}}{5\times10^{-13}} = \frac{6{,}4\times10^{-12}}{5\times10^{-13}} = \frac{6{,}4}{5}\times10^{-12-(-13)} = 1{,}28\times10^{1} = 12{,}8$$

Ejercicios Propuestos

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $2(7{,}2 \times 10^{-6})$
2. $4{,}2(3{,}52 \times 10^{8})$
3. $\frac{1{,}13\times10^{5}}{2}$
4. $\frac{1}{4}(4{,}83 \times 10^{-6})$
5. $\frac{3{,}27\times10^{8}}{3}$
6. $5(3 \times 10^{-4} + 2{,}6 \times 10^{-5})$
7. $3{,}8(6{,}26 \times 10^{13} - 42 \times 10^{12})$
8. $(2{,}73 \times 10^{-2})(1{,}16 \times 10^{4})$
9. $(4{,}25 \times 10^{-8})(1{,}2 \times 10^{-6})$
10. $(3{,}1 \times 10^{5})(2{,}3 \times 10^{6})$
11. $1{,}25 \times 10^{-6}(7 \times 10^{9} + 1{,}2 \times 10^{1}0)$
12. $5{,}4 \times 10^{8}(1{,}3 \times 10^{-11} - 5 \times 10^{-12})$
13. $\frac{1{,}16\times10^{-5}}{2\times10^{-3}}$
14. $\frac{4{,}25\times10^{-2}}{5\times10^{3}}$
15. $\frac{(1{,}32\times10^{-4})(2{,}5\times10^{-3})}{3\times10^{-12}}$
16. $\frac{(3{,}78\times10^{-3})(4{,}26\times10^{-5})}{2{,}7\times10^{-3}}$

17. $\frac{3{,}5\times10^{7}+2{,}3\times10^{7}}{5{,}9\times10^{5}-30\times10^{4}}$

18. $\frac{1{,}73\times10^{-2}-0{,}3\times10^{-3}}{2\times10^{-6}}$

19. $\frac{(1{,}26\times10^{-5})(1{,}04\times10^{-3})}{(2{,}73\times10^{-3})(1{,}2\times10^{-4})}$

20. $\frac{4{,}2\times10^{5}(1{,}7\times10^{-4}+0{,}003\times10^{-2})}{8{,}4\times10-1}$

MINIEXAMEN

1. ¿Qué altura tendría una pila de 1 000 000 de hojas de cuaderno si se necesitan 10 hojas para tener 1mm?
   A)10^3mm B)10^6mm A)10^5mm A)10^2mm

2. En el año 1982 la edad de la tierra era de $1{,}3\times10^{17}$ segundos y la de la pirámide de Keops, $2{,}35\times10^{11}$ segundos. La diferencia de edad entre la tierra y la pirámide en notación científica es:
   A)$1{,}2999985\times10^{11}$ B)$1{,}2999985\times10^{17}$ C)$1{,}2999985\times10^{-11}$ D) $1{,}2999985\times10^{-17}$

3. La expresión $3^{11}+3^{11}+3^{11}$es equivalente a:
   A)3^{12} B)9^{33} A)3^{33} A)9^{11} D)Ninguna