ENCUENTRO # 5
TEMA: Resolución de problemas de razones, proporciones y porcentajes.

CONTENIDOS:

1. Magnitudes proporcionales (directa e inversa).

2. Regla de tres simple.

DESARROLLO

Cantidades Proporcionales

Si se tienen 2 cantidades tales que al multiplicar una de ellas por un número la otra queda multiplicada por el mismo número, o al dividir una de ellas la otra queda dividida por el mismo número, se dice que las cantidades son *directamente proporcionales*.
Ejemplo:

1. Si 18 lápices cuestan \$28, entonces 54 lápices costarán el triple, es decir, \$84; al multiplicar el número de lápices por 3 el costo también quedó multiplicado por 3. Por lo tanto, las cantidades son directamente proporcionales.

2. Un automóvil recorre 360 km en 4 horas a velocidad constante; entonces, en 2 horas recorrerá la mitad, esto es 180 km, ambas cantidades quedaron divididas por 2, entonces se dice que son directamente proporcionales.

Si se tienen 2 cantidades tales que al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número y viceversa, entonces, las cantidades se dice que son *inversamente proporcionales*.

Ejemplo:
Si 18 hombres construyen una barda en 12 días, entonces 6 hombres construirán la misma barda en el triple de tiempo, es decir, 36 días. Al dividir el número de hombres por 3, el número de días quedó multiplicado por 3, por consiguiente las cantidades son inversamente proporcionales.
Razón. Es el cociente entre 2 cantidades, donde el numerador recibe el nombre de antecedente y el denominador de consecuente.
Para las cantidades a, b en la razón $\frac{a}{b}$ ó $a \div b$ con $b \neq 0$, a recibe el nombre de antecedente y b el de consecuente.
Ejemplo:
En la razón $\frac{7}{4}$,7 es el antecedente y 4 el consecuente.

En la razón $2 \div 3$ (se lee 2 es a 3), 2 es el antecedente y 3 el consecuente.
Razón de proporcionalidad: Si a y b son 2 cantidades directamente proporcionales, la razón $\frac{a}{b}$ recibe el nombre de razón de proporcionalidad, la cual siempre es constante.
Ejemplo:
Si 18 libros de ciencia cuestan \$1260, la razón de proporcionalidad es de 70 ya que $\frac{1260}{18} = 70$

Proporción

Es la igualdad entre 2 razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ o bien } a : b :: c : d \text{ con } b \neq 0 \wedge c \neq 0$$

La expresión se lee a es a b como c es a d son los extremos, b y c son los medios.

Ejemplo:
3 es a 6 como es a 16, se escribe $\frac{3}{6} = \frac{8}{16}$
Al simplificar cada fracción se obtiene $\frac{1}{2}$, la razón de proporcionalidad.
En una proporción el producto de os extremos es igual al producto de los medios:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } a \cdot d = b \cdot c \text{ con } b \neq 0 \wedge d \neq 0$$

Ejemplo:
Para la proporción $\frac{5}{4} = \frac{20}{16}$ se tiene que $(5)(16) = (4)(20)) = 80$
En una proporción un externo es igual al producto de los medios dividido por el extremo restante, es decir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } a = \frac{b \cdot c}{d} \vee d = \frac{b \cdot c}{a}$$

Ejemplos:

1. En la proporción $\frac{2}{5} = \frac{10}{15}$ se tiene que $2 = \frac{(3)(10)}{15} \wedge 15 = \frac{(3)(10)}{2}$

2. Halla el valor de m en la siguiente proporción $\frac{m}{5} = \frac{24}{30}$
   Solución m es un extremo en la proporción, entonces:

   $$m = \frac{(5)(24)}{30} = \frac{120}{30} = 4$$

   Por tanto, $m = 4$

3. ¿Cuál es el valor de b en la siguiente proporción $\frac{7}{2} = \frac{10}{b}$?
   Solución
   b es uno de los extremos en la proporción, por tanto:

$$b = \frac{(2)(10)}{7} = \frac{20}{7}$$

Por consiguiente, $b = \frac{20}{7}$

En una proporción un medio es igual al producto de los extremos dividido por el medio restante, es decir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } \frac{a \cdot d}{c} \vee c = \frac{a \cdot d}{b}$$

Ejemplo:

1. En la proporción $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$, se tiene que:

$$7 = \frac{(2)(21)}{6} \wedge 6 = \frac{(2)(21)}{7}$$

2. ¿Cuál es el valor de c en la proporción $\frac{5}{4} = \frac{c}{28}$?
Solución
c es un medio de la proporción, entonces:

$$c = \frac{(5)(28)}{4} = \frac{140}{4} = 35$$

Por tanto $c = 35$.

Ejercicios propuestos

Determine el valor del elemento que falta en cada una de las siguientes proporciones.

1. $\frac{3}{4} = \frac{x}{8}$
2. $\frac{2}{n} = \frac{8}{32}$
3. $\frac{4}{5} = \frac{12}{m}$
4. $\frac{a}{5} = \frac{6}{15}$
5. $\frac{20}{x} = \frac{6}{15}$
6. $\frac{7}{14} = \frac{y}{10}$
7. $\frac{x}{4} = \frac{6}{2}$
8. $\frac{2}{3} = \frac{12}{n}$
9. $\frac{7}{8} = \frac{56}{p}$
10. $\frac{x}{8} = \frac{9}{12}$
11. $\frac{3}{7} = \frac{z}{28}$
12. $\frac{y}{5} = \frac{8}{20}$
13. $\frac{x}{100} = \frac{150}{75}$
14. $\frac{15}{70} = \frac{30}{x}$

Media proporcional (media geométrica)
A un proporción de la forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}; b \neq 0, c \neq 0$$

Se le llama *proporción geométrica* y se dice que b es un media proporcional (geométrica entre a y c. La media proporcional es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

Ejemplo:

1. En la proporción $\frac{4}{8} = \frac{8}{16}$ se tiene que:

$$\sqrt{(4)(16)} = \sqrt{64} = 8$$

2. Calcula el valor de m en la proporción $\frac{9}{m} = \frac{m}{4}$
   Solución
   m es la media proporcional de 9 y 4, entonces:

$$m = \sqrt{(9)(4)} = \sqrt{36} = 6$$

3. ¿Cuál es la media proporcional entre 4 y 6?
   Solución
   La proporción es $\frac{4}{b} = \frac{b}{6}$ donde b es la media proporcional, por tanto:

$$b = \sqrt{(4)(6)} = \sqrt{24} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3} = 2\sqrt{2 \cdot 3} = 2\sqrt{6}$$

Ejercicios propuestos

Encuentra la media proporcional(geométrica) entre los números dados:

1. 12 y 3
2. 6 y 24
3. 9 y 25
4. 4 y 12
5. 2 y 7
6. 9 y 18
7. 10 y 25
8. 0.1 y 0.5
9. 0.2 y 0.8
10. 0.8 y 1.6

Regla de tres simple

Es la operación que se utiliza para encontrar el cuarto término en una proporción. A la parte que contiene los datos conocidos se le llama *supuesto* y a la que contiene el dato no conocido se le llama *pregunta*.

Directa: Se utiliza cuando las cantidades son directamente proporcionales.

<u>Ejemplos:</u>

1. Si 12 discos compactos cuestan \$600, ¿cuánto costarán 18?
   Solución
   Supuesto: 12 discos compactos cuestan \$600
   Pregunta:18 discos cuestan x
   Las cantidades son directamente proporcionales, ya que al aumentar el número de discos el precio también se incrementa. Se forma una proporción entre las razones del supuesto y la pregunta.

   $$\frac{12}{18} = \frac{600}{x} \text{ donde } x = \frac{(600)(18)}{12} = 900$$

   Por lo tanto, 18 discos compactos cuestan \$900.

2. Una llave que se abre 4 horas diarias durante 5 días, vierte 5 200 litros de agua, ¿cuántos litros verterá en 12 días si se abre 4 horas por día?
   Solución
   Se calcula el número de horas totales; es decir, en 5 días la llave ha estado abierta 20 horas y en 12 días la llave permaneció abierta 48 horas.
   Supuesto: en 20 horas la llave ha vertido 5 200 litros.
   Pregunta: en 48 horas la llave ha vertido x litros.
   Las cantidades son directamente proporcionales, ya que al aumentar el número de horas también se incrementa el número de litros vertidos. Se forma una proporción entre las razones del supuesto y la pregunta.

   $$\frac{20}{48} = \frac{5200}{x} \text{ donde } x = \frac{(5200)(48)}{20} = \frac{249600}{20} = 12480$$

   Por consiguiente, en 48 horas la llave vierte 12 480 litros.

Inversa. Se utiliza cuando las cantidades son inversamente proporcionales.
<u>Ejemplos:</u>

1. Se ha planeado que una barda sea construida por 24 hombres en 18 días; sin embargo, sólo se logró contratar a 12 hombres, ¿en cuántos días la construirán?
   Solución
   Supuesto: 24 hombres construyen la barda en 18 días.
   Pregunta: 12 hombres la construirán en x días.
   Las cantidades son inversamente proporcionales, ya que al disminuir el número de hombres, los contratados tardarán más días en construirla.
   Se forman las razones entre las cantidades.

Razón entre número de hombres: $\frac{24}{12}$
Razón entre números de días: $\frac{18}{x}$
Se invierte cualquiera de las razones y se iguala con la otra, es decir:

$$\frac{x}{18} = \frac{24}{12} \text{ donde } x = \frac{(18)(24)}{12} = 36$$

Por tanto, 12 hombres construyen la barda en 36 días.

2. Las ruedas traseras y delanteras de un automóvil tienen un diámetro de 1.5 m y 1 m, respectivamente, cuando las primeras han dado 350 vueltas, ¿cuántas han dado las segundas?
Solución
Supuesto: las ruedas traseras tienen un diámetro de 1.5 m y dan 350 vueltas.
Pregunta: las ruedas delanteras tienen un diámetro de 1 m y dan x vueltas.
Razón entre los diámetros: $\frac{1,5}{1}$
Razón entre el número de vueltas: $\frac{350}{x}$
Se invierte cualquiera de las razones y se iguala con la otra, es decir:

$$\frac{x}{350} = \frac{1,5}{1} \text{ donde } x = \frac{(350)(1,5)}{1} = 525$$

Por consiguiente, las delanteras dan 525 vueltas.

Ejercicios propuestos

1. El precio de 25 latas de aceite es de \$248, ¿cuántas latas se podrán comprar con \$1 240?

2. Liam escucha la radio durante 30 minutos, lapso en el que hay 7 minutos de anuncios comerciales; si escucha la radio durante 120 minutos, ¿cuántos minutos de anuncios escuchará?

3. Durante 70 días de trabajo Ana ganó \$3 500, ¿cuánto ganaría si trabajara 12 días más?

4. Una llave abierta 6 horas diarias durante 7 días arrojó 6 120 litros de agua, ¿cuántos litros arrojará durante 14 días si se abre 4 horas diarias?

5. Un automóvil gasta 9 litros de gasolina cada 120 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer?

6. En un libro de 80 páginas cada una tiene 35 líneas, ¿cuántas páginas tendrá el mismo libro si en cada una se colocan 40 líneas?

7. Una bodega se llena con 3 500 sacos de 6 kg de papas cada uno y otra de la misma capacidad se llena con sacos de 5 kg, ¿cuántos sacos caben en la segunda bodega?

8. Un leñador tarda 8 segundos en dividir en 4 partes un tronco de cierto tamaño, ¿cuánto tiempo tardará en dividir un tronco semejante en 5 partes?

9. Si un automóvil hizo 9 horas durante un recorrido de 750 kilómetros, ¿qué tiempo empleará en recorrer 2 250 kilómetros si su velocidad es constante?

10. Teresa tiene en su tienda varios sacos de harina de 18 kg y va a vender cada uno en $108, pero como nadie quiere comprar por saco decide venderla por kilo. Su primer cliente le pidió 4 kg, ahora ella quiere saber cuánto debe cobrarle.

11. Don Arturo tiene una pastelería y sabe que para hacer un pastel de fresas para 8 personas utiliza 2 kg de azúcar, ¿qué cantidad de azúcar utilizará si le encargan un pastel, también de fresas, que alcance para 24 personas?

12. Ana, Fabián y Liam han ido a comprar discos compactos; Ana compró 2 de música grupera; Fabián 3 de rock alternativo y Liam compró 5 de heavy metal. Si en total se pagaron $1 620 y todos cuestan lo mismo, ¿cuánto deberá pagar cada uno?

13. El valor de 25 m2 de azulejo es de $3 125. ¿Cuántos m2 se comprarán con $15 625?

14. Si 9 tarros tienen un precio de $450, ¿cuántos tarros se comprarán con $ 7 200?

15. Se compraron 40 kg de dulces para repartirlos equitativamente entre 120 niños. ¿Cuántos kilogramos se necesitarán para un grupo de 90 pequeños?

16. Un albañil gana $1 500 mensuales. ¿Cuánto recibe por 20 días?

17. Fernando, Josué y Martín cobraron por resolver una guía de problemas de cálculo de varias variables $975; Fernando trabajó 6 horas, Josué 4 horas y Martín 3 horas, ¿cuánto recibirá cada uno por hora de trabajo?

18. Un microbús cobra a una persona $17.50 de pasaje por una distancia de 21 kilómetros, ¿cuánto pagará otra persona, cuyo destino está a 51 kilómetros de distancia?

19. Una piscina se llena en 10 horas con una llave que arroja 120 litros de agua por minuto, ¿cuántos minutos tardará para llenarse si esta llave arrojara 80 litros del líquido?

20. Un grupo de 45 estudiantes de CONAMAT contrata un autobús para ir a un evento y calculan que cada uno debe pagar \$50; finalmente sólo asisten 30 estudiantes, ¿cuánto deberá pagar cada uno? 21. Si 18 metros de alambre cuestan \$63. ¿Cuál será el precio de 42 m?

21. Si una docena de pañuelos cuesta \$200, ¿cuánto se pagará por 9 de ellos?

22. Una decena de canicas cuesta \$18, ¿cuántas podrá comprar un niño con \$5.40?

23. Un automóvil recorre 240 kilómetros con 60 litros de gasolina. ¿Cuántos litros necesita para recorrer 320 kilómetros?

24. Si 3 decenas de pares de zapatos cuestan \$18 000, ¿cuál será el precio de 25 pares?

25. Si 15 hombres hacen una obra de construcción en 60 días, ¿cuánto tiempo emplearán 20 hombres para realizar la misma obra?

26. Si 4 hombres terminan un trabajo en 63 días, ¿cuántos más deben de añadirse a los primeros para concluir el mismo trabajo en 28 días?

27. Un ciclista recorrió cierta distancia en 4 horas con una velocidad de 60 km/h, ¿qué velocidad deberá llevar para recorrer la misma distancia en 5 horas?

28. Si se llenan 24 frascos con capacidad para 250 gramos, con mermelada de fresa, ¿cuántos frascos de 300 gramos se pueden llenar con la misma cantidad de mermelada?

29. Un ejército de 900 hombres tiene víveres para 20 días; si se desea que las provisiones duren 10 días más, ¿cuántos hombres habrá que dar de baja?

30. Se desea plantar árboles dispuestos en 30 fi las, de modo que cada fi la tenga 24 de éstos. Si se colocan los mismos árboles en 18 filas, ¿cuántos se tendrán por fila?